目　录

第一章　Fourier 变换

本章介绍 Fourier 变换并研究其基本性质. 由于大部份内容极为一般, 在此我们仅做简单介绍. 首先, 在前两节, 论述 $L^1(E_n)$、$L^2(E_n)$ 空间上 Fourier 变换的性质. 其次, 由于 Fourier 变换的形式特点更容易在广义函数中描述, 故在第三节, 我们将 Fourier 变换的定义拓广到缓变广义函数空间上. 读者将会注意到, 在本章中, 我们主要是利用欧氏空间的平移结构. 而在后几章(特别是在第四章)里, 欧氏空间中的旋转变换起着重要的作用.

§1　Fourier 变换的 L^1 基本理论

我们首先引入本书通用的一些记号. E_n 表示 n 维(实)欧氏空间, E_n 的元素记作 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\cdots$. 对于 $x, y\in E_n$, x 与 y 的内积是数 $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; x 的范数是(非负)数 $|x|=\sqrt{x\cdot x}$; 此外, $dx=dx_1\,dx_2\cdots dx_n$ 表示通常的 Lebesgue 测度元.

我们将讨论定义在 E_n 上的各种函数空间, 其中最简单的是 $L^p=L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$, 即, 使得 $\|f\|_p=\left(\int_{E_n} |f|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty$ 的可测函数空间(f 为可测函数). 数 $\|f\|_p$ 称为 f 的 L^p 范数. 空间 $L^\infty(E_n)$ 是由 E_n 上所有本性有界的函数组成. 对于 $f\in L^\infty(E_n)$, 令 $\|f\|_\infty$ 是 $|f(x)|$ 在 E_n 上的本性上确界[1]. 通常, 建立空间 C_0 (即

1) 当 $f, g\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时, 若对几乎一切的 $x\in E_n$, 有 $f(x)=g(x)$, 则称 f 与 g **等价**. 如果考虑由此等价关系得到的等价类, 其范数以类中任一代表元的范数来定义(若 f 与 g 等价, 则显然有 $\|f\|_p=\|g\|_p$), 那就得到一个 Banach 空间. 我们仍记这个空间为 $L^p(E_n)$. 从上下文可以看清楚要讨论的 $L^p(E_n)$ 究竟是哪一个空间.

由一切在无穷远处为0的连续函数组成，并以上述L^∞的范数为范数的空间)比建立$L^\infty=L^\infty(E_n)$更自然些. 今后，如不另加说明，所论函数都是复值(Borel)可测函数.

当$f\in L^1(E_n)$时，f的Fourier变换$\hat{f}$是如下定义的函数：对于任意$x\in E_n$，

$$\hat{f}(x)=\int_{E_n}f(t)e^{-2\pi ix\cdot t}\,dt.$$

容易建立下列定理：

定理1.1 (a) 映射$f\to\hat{f}$是$L^1(E_n)$到$L^\infty(E_n)$的一个有界线性变换. 事实上$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$;

(b) 若$f\in L^1(E_n)$，则$\hat{f}$一致连续.

定理1.2(Riemann-Lebesgue) 若$f\in L^1(E_n)$，则当$|x|\to\infty$时，$\hat{f}(x)\to 0$; 再注意到前一结果，于是可以断言$\hat{f}\in C_0$.

定理1.1是显然成立的. 至于定理1.2，当f是n维区间$I=\{x\in E_n; a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\ \cdots,\ a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}$的特征函数时，也显然成立(因为可把$\hat{f}$明显地表成累次积分). 而对于这种特征函数的有限线性组合，定理1.2的结论也正确. 对于一般的函数$f\in L^1(E_n)$，可以借助于这种线性组合g按L^1范数逼近f来证明这一定理. 因为这时$f=g+(f-g)$，其中$\hat{f}-\hat{g}$一致地小(依定理1.1(a))，而且当$|x|\to\infty$时，$\hat{g}(x)\to 0$.

定理1.2给出了函数是一个Fourier变换的必要条件. 然而，"属于C_0类"远不是充分条件(见4.1). 似乎尚没有简单满意的条件来刻划$L^1(E_n)$中函数的Fourier变换的特征.

上述Fourier变换的定义，可立即推广到有限Borel测度：若μ是E_n上的有限Borel测度，定义$\hat{\mu}$为

$$\hat{\mu}(x)=\int_{E_n}e^{-2\pi ix\cdot t}\,d\mu(t).$$

如果在定理1.1中，用μ的全变差代替L^1范数，则定理1.1对这种Fourier变换是成立的.

除向量空间的运算外，我们还可赋予$L^1(E_n)$一个"乘法运

算",使之成为一个 Banach 代数. 这个运算称为卷积, 定义如下: 若 f、g 皆属于 $L^1(E_n)$, 它们的卷积 $h=f*g$ 是一个函数, 其在 $x\in E_n$ 处的值为

$$h(x)=\int_{E_n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

容易证明, $f(x-y)g(y)$ 是双变量 x, y 的可测函数. 那么, 根据 Fubini 定理交换积分次序, 立刻推知 $h\in L^1(E_n)$, 且 $\|h\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$. 此外, 卷积运算还是可交换和可结合的. 更一般地说, 当 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且 $g\in L^1(E_n)$ 时, $h=f*g$ 是有意义的. 事实上, 我们有以下结果:

定理 1.3 若 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且 $g\in L^1(E_n)$, 则 $h=f*g$ 是有意义的, 且属于 $L^p(E_n)$. 此外

$$\|h\|_p\leqslant\|f\|_p\|g\|_1.$$

显然我们有 $|h(x)|\leqslant\int_{E_n}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$. 于是定理的结论容易由如下的 Minkowski 积分不等式推出:

$$\left(\int_{E_n}|h(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\int_{E_n}\left(\int_{E_n}|f(x-y)|^p dx\right)^{1/p}|g(y)|\,dy$$
$$=\|f\|_p\|g\|_1.$$

如同推广 Fourier 变换一样, 也可将此运算推广到有限 Borel 测度: 设 μ 是 E_n 上有限 Borel 测度, 定义 $h=f*d\mu$ 如下: 对于 $x\in E_n$ 及 $f\in L^p$,

$$h(x)=\int_{E_n} f(x-y)\,d\mu(y).$$

如果在定理 1.3 中, 用 μ 的全变差代替 g 的 L^1 范数, 那么定理 1.3 对这种卷积是正确的.

调和分析的一个基本特征就在于: 二个函数卷积的 Fourier 变换是它们各自 Fourier 变换的(点态)乘积. 更确切地说, 从定义可以直接推出下述结果:

定理 1.4 若 f 和 g 皆属于 $L^1(E_n)$, 则

$$(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}.$$ [2)]

其他许多重要的分析运算与 Fourier 变换之间，也有极简单的联系. 例如，令 τ_h 表示由 $h\in E_n$ 给出的平移(即把函数 $g(x)$ 映射成函数 $g(x-h)$ 的算子)，则当 $f\in L^1(E_n)$ 时，有

$$\text{(1.5)}\qquad \begin{aligned} &\text{(i)}\quad (\tau_h f)^\wedge(x) = e^{-2\pi i h\cdot x}\hat{f}(x),\\ &\text{(ii)}\quad (e^{2\pi i t\cdot h}f(t))^\wedge(x) = (\tau_h\hat{f})(x). \end{aligned}$$

又如，令 δ_a 表示由 $a>0$ 给出的伸缩(即将函数 $g(x)$ 映射成函数 $g(ax)$ 的算子)，于是当 $f\in L^1(E_n)$ 时，有

$$\text{(1.6)}\qquad a^n(\delta_a f)^\wedge(x) = \hat{f}(a^{-1}x).$$

至于微分与 Fourier 变换，则以下述方式相互联系：

定理 1.7 设 $f\in L^1(E_n)$, $x_k f(x)\in L^1(E_n)$, 此处 x_k 是第 k 个坐标函数，则 $\hat{f}$ 关于 x_k 可微，且

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = (-2\pi i\, t_k f(t))^\wedge(x).$$

证明 令 $h=(0, \cdots, h_k, 0, \cdots, 0)$ 是沿第 k 个坐标轴的非零向量. 依(1.5)之(ii)和 Lebesgue 控制收敛定理，当 $h_k\to 0$ 时，

$$\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h_k} = \left\{\left(\frac{e^{-2\pi i t\cdot h}-1}{h_k}\right)f(t)\right\}^\wedge(x)$$
$$\to(-2\pi i t_k f(t))^\wedge(x).$$]

定理 1.7 断言：函数乘以第 k 个坐标函数后的 Fourier 变换，等于该函数的 Fourier 变换对第 k 个变量的偏导数乘以某个常数. 我们还可证明，函数的偏导数的 Fourier 变换可以用函数的 Fourier 变换乘以相应的坐标函数而得到(也差一常数因子). 我们将遇到这个事实的多种表达形式. 为了精确叙述其中之一(或许是最易证明的一种)，我们引入下述概念：若 $f\in L^p(E_n)$, 且存在 $g\in L^p(E_n)$, 使得当 $h_k\to 0$ 时，

$$\left(\int_{E_n}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h_k}-g(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\to 0,$$

就称 f 按 L^p 范数关于 x_k 可微(此处沿用定理 1.7 证明中规定的记号). 函数 g 称为 f 按 L^p 范数关于 x_k 的偏导数.

---

2) 我们将一直沿用记号 $(\cdots)^\wedge$ 来表示$(\cdots)$的 Fourier 变换.

对 $|\hat{g}(x)-\hat{f}(x)(e^{2\pi i(h\cdot x)}-1)/h_k|$ 应用(1.5)之(i)和定理1.1之(a)，并令 $h_k\to 0$，可得：

定理1.8 若 $f\in L^1(E_n)$，g 是 f 按 L^1 范数关于 x_k 的偏导数，则

$$\hat{g}(x)=2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

定理1.7和1.8皆可推广到高阶导数．我们不再详述，只给出下列公式：

$$\text{(1.9)}\qquad \begin{aligned}&\text{(i)}\quad P(D)\hat{f}(x)=(P(-2\pi i t)f(t))^{\wedge}(x),\\ &\text{(ii)}\quad (P(D)f)^{\wedge}(x)=P(2\pi i x)\hat{f}(x),\end{aligned}$$

这里，对于 n 元非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，设 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$D^\alpha=\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$．又 P 是 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的 n 元多项式，$P(D)$ 是相应的微分算子(即在 $P(x)$ 中以 D^α 代替 x^α)．

现在转入讨论 Fourier 分析的反演问题．就是说，要考虑这样的问题：给定一个可积函数的 Fourier 变换 $\hat{f}$，如何从 $\hat{f}$ 得到它的原象 f？熟悉 Fourier 级数和积分初等理论的读者会希望 $f(t)$ 等于积分

$$\text{(1.10)}\qquad \int_{E_n}\hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}dx.$$

不幸的是，$\hat{f}$ 不一定可积(例如，当 $n=1$，f 是有限区间的特征函数时)．我们将利用积分的某些求和法，来解决这个难点．首先引入 Abel 求和法(关于级数的类似求和法，大家是非常熟悉的)．对任一 $\varepsilon>0$，定义 Abel 平均 $A_\varepsilon=A_\varepsilon(f)$ 为积分

$$A_\varepsilon(f)=A_\varepsilon=\int_{E_n}f(x)e^{-\varepsilon|x|}dx.$$

显然，若 $f\in L^1(E_n)$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(f)=\int_{E_n}f(x)\,dx$．而且，甚至当 f 不可积时，Abel 平均也是有意义的(例如，若只假定 f 有界，那么对一切 $\varepsilon>0$，$A_\varepsilon(f)$ 都存在)．并且，即使 f 不可积，$A_\varepsilon(f)$ 的极限

$$\text{(1.11)}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n}f(x)e^{-\varepsilon|x|}dx$$

也可以存在. 这种情形的一个经典例子是当 $n=1$ 时函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$[3].

只要(1.11)中的极限存在且有限,就称 $\int_{E_n} f$ Abel 可求和,和就是该极限值.

与 Abel 求和法类似的是 Gauss 求和法. 它是用 Gauss 平均(有时称为 Gauss-Weierstrass 平均) $G_s(f)=G_s$ 来定义的,

$$G_s(f)=G_s=\int_{E_n} f(x)e^{-s|x|^2}dx.$$

如果

$$\text{(1.11')} \qquad \lim_{s\to 0}G_s(f)=\lim_{s\to 0}\int_{E_n} f(x)e^{-s|x|^2}dx$$

存在且等于数 l, 则称 $\int_{E_n} f$ Gauss 可求和(和等于 l).

我们看到, (1.11)和(1.11')都可写成以下形式.

$$\text{(1.12)} \qquad M_{\varepsilon,\Phi}(f)=M_\varepsilon(f)=\int_{E_n}\Phi(\varepsilon x)f(x)\,dx,$$

其中, $\Phi\in C_0$, 且 $\Phi(0)=1$. 称 $M_\varepsilon(f)$ 为积分 $\int_{E_n} f$ 的 Φ 平均. 若 $\lim_{\varepsilon\to 0}M_\varepsilon(f)=l$, 则称 $\int_{E_n} f$ 可求和, 和等于 l.

我们需要计算 $e^{-s|x|^2}$ 和 $e^{-\varepsilon|x|}$ 的 Fourier 变换. 前者很容易计算, 它可化归一维情形: 由于

$$\int_{E_n} e^{-4\pi^2|x|^2}e^{-2\pi ix\cdot t}dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2x_j^2}e^{-2\pi ix_jt_j}dx_j$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t_j^2/4}=2^{-n}\pi^{-n/2}e^{-|t|^2/4},$$

对此做变量代换 $(\sqrt{\alpha}/2\sqrt{\pi})y=x$, 就得到

定理1.13 对一切 $\alpha>0$, 有

3) 如所周知, 此时 $\lim_{p\to 0}\int_0^p f(x)\,dx$ 存在. 容易证明, 只要 f 局部可积, 且上述极限存在, 设为 l, 则 Abel 平均 $A_\varepsilon=\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}f(x)\,dx$ 收敛于 l.

$$\int_{E_n} e^{-\pi\alpha|y|^2}e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy=\alpha^{-n/2}e^{-\pi|t|^2/\alpha}.$$ [4]

至于计算第二个函数的 Fourier 变换，要稍困难些，我们有以下定理：

定理 1.14 对一切 $\alpha>0$，有

$$\int_{E_n} e^{-2\pi|y|\alpha}e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy=c_n\frac{\alpha}{(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}},$$

其中 $c_n=\Gamma[(n+1)/2]/(\pi^{(n+1)/2})$.

证明 作变量代换，我们看到，只要证 $\alpha=1$ 的情形即可．为此，我们暂且承认，在 $\beta>0$ 时，有

(i) $$e^{-\beta}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\beta^2/4u}\,du.$$

然后，应用定理 1.13 来建立第三个等式，

$$\begin{aligned}
&\int_{E_n} e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy\\
&=\int_{E_n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-4\pi^2|y|^2/4u}\,du\right\}e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\int_{E_n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u}e^{-2\pi i t\cdot y}\,dy\right\}du\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}}\right)^{n/2}e^{-u|t|^2}\right\}du\\
&=\frac{1}{\pi^{(n+1)/2}}\int_0^\infty e^{-u}u^{(n-1)/2}e^{-u|t|^2}\,du\\
&=\frac{1}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty e^{-s}s^{(n-1)/2}\,ds\\
&=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}.
\end{aligned}$$

所以，只要证明了(i)，定理 1.14 就得证．现在用下面两个等式来证明(i)：

(ii) $$e^{-\beta}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx,\ \beta>0,$$

4) 注意，这个定理说明 $e^{-\pi|x|^2}$ 是它本身的 Fourier 变换．

(iii)
$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du.$$

这里，第二个等式是显然成立的．至于第一个等式，若对函数 $e^{i\beta z}/(1+z^2)$ 应用残数理论，也不难得到．于是，

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\beta x\left\{\int_0^\infty e^{-u}e^{-ux^2}du\right\}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\int_0^\infty e^{-ux^2}\cos\beta x\,dx\right\}du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2}e^{i\beta x}\,dx\right\}du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\pi\int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2uy^2}e^{-2\pi i\beta y}\,dy\right\}du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-\beta^2/4u}\right\}du. \end{aligned}$$

因而定理得证．】

设 $\alpha>0$，我们用 W 和 P 分别表示 $e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ 和 $e^{-2\pi\alpha|y|}$ 的 Fourier 变换．即，$W(t,\alpha)=(4\pi\alpha)^{-(n/2)}e^{-|t|^2/4\alpha}$，$P(t,\alpha)=c_n[\alpha/(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}]$．前者称为Weierstrass核（或Gauss-Weierstrass 核），后者称为 Poisson 核[5]．

我们要特别指出，积分 (1.10) 的 Abel 平均和 Gauss 平均都收敛于 f（按范数以及 a.e.）．为此，我们先导出一个一般公式，它能把该积分的 Abel 平均与 Gauss 平均表成 f 与 Poisson 核或与 Weierstrass 核的卷积．为了得出这些表达式，我们要用到下面的重要结果：

定理 1.15（乘法公式）　若 f, g 属于 $L^1(E_n)$，则

$$\int_{E_n}\hat{f}(x)g(x)\,dx=\int_{E_n}f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

证明　应用 Fubini 定理，我们有

---

5) 在稍后的章节里，我们会遇到另一些 Poisson 核，它们定义在一定的区域上．故此后，我们称刚才引进的 Poisson 核为定义在上半空间 $E_{n+1}^+=\{x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in E_{n+1};x_{n+1}>0\}$ 上的 Poisson 核．

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)g(x)\,dx=\int_{E_n}\left\{\int_{E_n} f(t)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dt\right\}g(x)\,dx$$
$$=\int_{E_n}\left\{\int_{E_n} g(x)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dx\right\}f(t)\,dt$$
$$=\int_{E_n} f(t)\hat{g}(t)\,dt.$$ ∎

现在假定(1.12)中的 Φ 是可积的，其 Fourier 变换 $\hat{\Phi}=\varphi$. 若令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, 则(1.6)蕴含 $(\delta_\varepsilon\Phi)^\wedge(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)=\varphi_\varepsilon(x)$. 例如，从定理 1.13 可知，$\Phi(x)=e^{-4\pi^2|x|^2}$ 时，有 $\varphi_\varepsilon(x)=W(x,\ \varepsilon^2)$. 类似地，从定理 1.14 可知，$\Phi(x)=e^{-2\pi|x|}$ 时，有 $\varphi_\varepsilon(x)=P(x,\ \varepsilon)$. 于是，为了计算这后一函数的 Fourier 变换，我们对 $f(x)$ 和 $e^{2\pi i t\cdot x}\delta_\varepsilon\Phi(x)$ 应用乘法公式（定理 1.15）和(1.5)之(ii)，就可得到

定理 1.16 若 f 和 Φ 属于 $L^1(E_n)$, 且 $\varphi=\hat{\Phi}$, 则对一切 $\varepsilon>0$, 有

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\Phi(\varepsilon x)\,dx=\int_{E_n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx.$$

特别有，

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx=\int_{E_n} f(x)P(x-t,\ \varepsilon)\,dx.$$

且对一切 $\alpha>0$, 有

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}e^{-4\pi^2\alpha|x|^2}\,dx=\int_{E_n} f(x)W(x-t,\ \alpha)\,dx.$$

现在我们来证明，对于包括 Abel、Gauss 求和法在内的诸多求和法来说，积分(1.10)是可求和于 f 的. 首先证明，在非常一般的条件下，$\int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\Phi(\varepsilon x)\,dx$（见(1.12)）按 L^1 范数收敛于 f. 其条件是：Φ 与 $\hat{\Phi}=\varphi$ 皆可积，且 $\int_{E_n}\varphi(x)dx=1$. 下面的引理将指出 Poisson 核和 Gauss-Weierstrass 核均满足这些条件.

引理 1.17 (a) 对一切 $\alpha>0$, 有 $\int_{E_n} W(x,\ \alpha)\,dx=1$;

(b) 对一切 $\varepsilon>0$, 有 $\int_{E_n} P(x,\ \varepsilon)\,dx=1$.

证明 首先，由变量代换，我们注意到 $\int_{E_n} W(x, \alpha)\,dx = \int_{E_n} W(x,1)dx$，$\int_{E_n} P(x, \varepsilon)\,dx = \int_{E_n} P(x,1)\,dx$. 因此，只需对 $\alpha = 1 = \varepsilon$ 的情形证明引理即可. 此时 (a) 是一维等式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4}\,dx = 2\sqrt{\pi}$ 的直接推论 (因为 n 维积分可写作 n 个这样的积分的乘积). 为证明(b)，先要看到 $1/c_n = \pi^{(n+1)/2}/\Gamma[(n+1)/2]$ 是 E_{n+1} 中单位球面 Σ_n 的面积之半. 若用 ω_n 表示 Σ_n 的面积，则 (b) 等价于

$$\int_{E_n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} = \frac{\omega_n}{2}.$$

令 $r = |x|$，$x' = x/r$ (当 $x \neq 0$)，$\Sigma_{n-1} = \{x \in E_n;\ |x| = 1\}$，$dx'$ 为 Σ_{n-1} 上的面积元，并设 $r = \tan\theta$，就有

$$\int_{E_n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} = \int_0^{\infty}\left(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{1}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}\,dx'\right) r^{n-1}\,dr$$

$$= \omega_{n-1}\int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}\,dr$$

$$= \omega_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta\,d\theta.$$ [6)]

而 $\omega_{n-1}\sin^{n-1}\theta$ 显然是用超平面 $x_n = \cos\theta$ 去截 Σ_n 而得到的半径为 $\sin\theta$ 的球面面积. 因此，上半个 Σ_n 的面积可由这些 $(n-1)$ 维球面面积对 θ 积分得到，其中 θ 自 0 变到 $\pi/2$；就是说，

$$\omega_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta\,d\theta = \frac{\omega_n}{2}.$$

这就是所要的结论. 】

定理 1.18 设 $\varphi \in L^1(E_n)$，且 $\int_{E_n} \varphi(x)dx = 1$. 对于 $\varepsilon > 0$，令 $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. 如果 $f \in L^p(E_n)$，$1 \leqslant p < \infty$；或者 $f \in C_0 \subset L^\infty(E_n)$，那么，当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p \to 0$. 特别地，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$u(x, \varepsilon) = \int_{E_n} f(t)P(x-t, \varepsilon)\,dt$ 和 $s(x, \varepsilon) = \int_{E_n} f(t)W(x-t, \varepsilon)\,dt$

---

6) 当然，我们把原来的积分用“极坐标” (r, x') 表出. 在此提醒读者，$dx = r^{n-1}\,dr\,dx'$ (详见(4.14)和文献注释).

按 L^p 范数收敛于 f [7].

证明 由变量代换得到

$$\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt=\int_{E_n}\varepsilon^{-n}\varphi(t/\varepsilon)\,dt=\int_{E_n}\varphi(t)\,dt=1.$$

因此,

$$\begin{aligned}(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x)&=\int_{E_n}f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt-\int_{E_n}f(x)\varphi_\varepsilon(t)\,dt\\&=\int_{E_n}[f(x-t)-f(x)]\varphi_\varepsilon(t)\,dt.\end{aligned}$$

故由 Minkowski 积分不等式推知

$$\begin{aligned}\|f*\varphi_\varepsilon-f\|_p&\leqslant\int_{E_n}\left(\int_{E_n}|f(x-t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\varepsilon^{-n}|\varphi(t/\varepsilon)|\,dt\\&=\int_{E_n}\left(\int_{E_n}|f(x-\varepsilon t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}|\varphi(t)|\,dt.\end{aligned}$$

而表达式 $\left(\int_{E_n}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=\omega_{p,f}(h)=\omega(h)$ 就是通常所说的 f 在 L^p 中的连续模. 由于 $\omega(h)\leqslant 2\|f\|_p$, 连续模显然是 h 的有界函数. 此外, 当 $|h|\to 0$ 时, 还有 $\omega(h)\to 0$. 这一事实对于 f 连续且有紧支集的情形是显然的. 至于一般的 f, 可用连续且有紧支集的函数来逼近(按 L^p 范数), 从而证明上述事实. 至此, 我们已证明了

$$\|f*\varphi_\varepsilon-f\|_p\leqslant\int_{E_n}\omega(-\varepsilon t)\,|\varphi(t)|\,dt.$$

而由于在 $\varepsilon\to 0$ 时, 上式右端被积函数趋向 0, 且被可积函数 $2\|f\|_p|\varphi(t)|$ 控制, 故依 Lebesgue 控制收敛定理, 右端积分趋向 0. 定理得证. 】

根据同样的论证, 还可得到下述结果. 虽然它并没有涉及 Fourier 积分的反演问题, 但对以后的讨论是有用的.

推论 1.19 设 $\varphi\in L^1(E_n)$, 且 $\int_{E_n}\varphi(t)\,dt=0$, 则只要 $f\in$

7) 这里, 对于 $x\in E_n$, $\varepsilon>0$ 所定义的函数 $u(x,\varepsilon)$ 称为 f 的 Poisson 积分; $s(x,\varepsilon)$ 称为 f 的 Gauss-Weierstrass 积分.

$L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$, 或 $f\in C_0\subset L^\infty(E_n)$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 就有 $\|f*\varphi_\varepsilon\|_p\to 0$.

证明 我们立刻看出, $(f*\varphi_\varepsilon)(x)=(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x)\cdot 0=(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x)\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt=\int_{E_n}[f(x-t)-f(x)]\varphi_\varepsilon(t)\,dt$, 余下的论证只需重复定理 1.18 的证明. 】

从定理 1.16 和 1.18, 我们得到 Fourier 反演问题的如下解答:

定理 1.20 如果 Φ 及其 Fourier 变换 $\varphi=\hat{\Phi}$ 是可积的, 且 $\int_{E_n}\varphi(x)\,dx=1$, 则积分 $\int_{E_n}\hat{f}(t)e^{2\pi it\cdot x}dt$ 的 Φ 平均按 L^1 范数收敛于 $f(x)$. 特别地, Abel 平均与 Gauss 平均按 L^1 范数收敛于 $f(x)$.

由于当 $\alpha>0$ 且 $\alpha\to 0$ 时, $s(x,\ \alpha)=\int_{E_n}\hat{f}(x)\,e^{2\pi it\cdot x}e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}dt$ 在 L^1 中收敛于 $f(x)$, 故可选一序列 $\alpha_k\to 0$, 使得对几乎所有的 x, 有 $s(x,\ \alpha_k)\to f(x)$. 若再假定 $\hat{f}\in L^1(E_n)$, 则可由 Lebesgue 控制收敛定理, 得出下面点态结果.

推论 1.21 如果 f, $\hat{f}$ 皆可积, 那么对几乎一切的 x, 有

$$f(x)=\int_{E_n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot t}dt\ ^{8)}.$$

上面我们已经挑选了 Gauss-Weierstrass 与 Abel 求和法. 前者可能是最简单的求和法, 而后者, 我们将在第二章中看到, 它与调和函数紧密联系着, 并给 Fourier 分析提供了一个强有力的工具[9].

说明 Gauss-Weierstrass 方法相对简单的典型例子是定理 1.13, 它的证明远比 Abel 方法的相应结果(定理 1.14)要简单得多.

---

8) 从定理 1.1 已经知道 $\hat{f}$ 是连续的. 如果 $\hat{f}$ 可积, 则积分 $\int_{E_n}\hat{f}(t)\,e^{2\pi ix\cdot t}dt$ 也是一个连续函数(它实际等于 $(\hat{f})^\wedge(-x)$). 这样, 在零测度集上改变 f 的值, 就可使推论中的等式对一切 x 成立.

9) 同样, Gauss-Weierstrass 的方法与热传导方程的解有着紧密联系.

我们还曾看到，引理 1.17(a) 的证明要比 (b) 的容易得多. 值得指出的是，利用推论 1.21，可以不经引理 1.17 证明中所用的计算，而导出后者. 事实上，对 $f(x)=e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ 应用推论 1.21 并利用定理 1.14，可得 $\int_{E_n}P(t,\ \varepsilon)e^{2\pi ix\cdot t}dt=e^{-2\pi\varepsilon|x|}$. 再令 $x=0$，就有 $\int_{E_n}P(t,\ \varepsilon)dt=1$.

从定理 1.20 显然可知，若对一切 x，有 $\hat{f}(x)=0$，则对几乎所有的 t，有 $f(t)=0$. 将此事实用于 $f=f_1-f_2$，就得到 Fourier 变换唯一性的结论：

推论 1.22 若 $f_1,f_2\in L^1(E_n)$，且对 $x\in E_n$ 有 $\hat{f}_1(x)=\hat{f}_2(x)$，则对几乎一切 $x\in E_n$，有 $f_1(t)=f_2(t)$.

至于 Fourier 反演问题，在点态意义下也有一个解. 我们要特别证明，积分 (1.10) 的 Abel 平均与 Gruss 平均几乎处处收敛于 $f(t)$. 为此，尚需引进几个新的概念和记号. 先叙述一个重要事实，它是关于 E_n 上函数积分的微分理论的：若 f 在 E_n 上局部可积，那么，对几乎一切 $x\in E_n$，当 $r\to 0$ 时，有

$$(1.23)\qquad \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}[f(x-t)-f(x)]dt\to 0\ ^{10)}.$$

特别地，这一事实对 $f\in L^p(E_n)$ 是正确的. 我们称使(1.23)成立的点 x 之集为 f *积分的可微点集*. 这一点集与每个局部可积的函数 f 有着固有的联系. 另外还有一个与 f 有着固有联系的点集，它虽较小，但其联系更紧密(如我们即将看到的). 它是使得

$$(1.24)\qquad \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|dt\to 0,\ 当\ r\to 0$$

成立的一切 x 的集合. 这个集合叫作 f 的 Lebesgue *点集*，它包含

---

10) 若令 $S(x;r)$ 表示球 $\{t\in E_n,\ |t-x|<r\}$，而 $|S(x;r)|$ 是其测度，那么，(1.23) 等价于 $f(x)=\lim\limits_{r\to 0}|S(x;r)|^{-1}\int_{S(x;r)}f(t)\,dt$. 当 $n=1$ 时，它变成 $f(x)=\lim\limits_{r\to 0}\left(\frac{1}{2r}\right)\int_{x-r}^{x+r}f(t)dt$，古典的 Lebesgue 定理就是指的这一等式几乎处处成立. 我们把 (1.23) 几乎处处成立的证明推迟到第二章，在那里，它将成为 Hardy-Littlewood 极大函数一般技巧的直接结果(参看第二章推论 3.14).

E_n 的几乎所有的点. 为阐明这一事实, 我们设 F_ρ 是 E_n 中使得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}\{|f(x-t)-\rho|-|f(x)-\rho|\}\,dt=0$$

不成立的一切 x 的点集. 利用 (1.23), 并注意到 $|f(x)-\rho|$ 局部可积, 便知 F_ρ 具有零测度. 那么, 对一切有理数 ρ, F_ρ 的并集 F 也有零测度. 我们断言, 当 $x\in E_n-F$ 时, (1.24) 成立. 事实上, 给定 $x\in E_n-F$ 和 $\varepsilon>0$, 令 ρ 是使 $|f(x)-\rho|<\varepsilon/2$ 的有理数, 并用 Ω_n 表示 E_n 中单位球(体)的体积. 那么有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt\\&\quad\leqslant\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-\rho|\,dt\\&\qquad+\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|\rho-f(x)|\,dt.\end{aligned}$$

其中右端第一项, 在 $r\to 0$ 时, 趋于 $|f(x)-\rho|<\varepsilon/2$, 而第二项等于 $|\rho-f(x)|<\varepsilon/2$. 于是当 r 接近 0 时, 有

$$(\Omega_n r^n)^{-1}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\varepsilon.$$

这说明, 几乎所有 E_n 中的点 x 皆属于 f 的 Lebesgue 点集.

我们要证明, 对于 f 的 Lebesgue 点集中之 t, 积分 (1.10) 在适当的条件下, Φ 可和于 $f(t)$. 更明确地说, 定理 1.16 和下述结果一起, 将给出使这一事实成立的条件, 它们是加在 Φ 的 Fourier 变换 φ 上的.

定理 1.25 设 $\varphi\in L^1(E_n)$, 令 $\psi(x)=\operatorname*{ess\,sup}_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|$, 当 $\varepsilon>0$ 时, 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. 如果 $\psi(x)\in L^1(E_n)$, $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 那么, 只要 x 属于 f 的 Lebesgue 点集, 就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)\int_{E_n}\varphi(t)\,dt.$$

特别地, 对几乎一切 $x\in E_n$, f 的 Poisson 积分与 Gauss-Weierstrass积分 $\int_{E_n}f(t)P(x-t,\varepsilon)\,dt$ 与 $\int_{E_n}f(t)W(x-t,\varepsilon)\,dt$, 在 $\varepsilon\to 0$ 时收敛于 $f(x)$.

证明 任意取定 f 的 Lebesgue 点集中一点 x. 对 $\delta>0$, 可找到 $\eta>0$, 使得, 当 $r\leqslant\eta$ 时, 有

(i) $$r^{-n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\delta.$$

由于对一切 $\varepsilon>0$, $\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt=\int_{E_n}\varphi(t)\,dt=a$, 故有

$$\begin{aligned}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)-af(x)|&=\left|\int_{E_n}\{f(x-t)-f(x)\}\varphi_\varepsilon(t)\,dt\right|\\&\leqslant\left|\int_{|t|<\eta}\{f(x-t)-f(x)\}\varphi_\varepsilon(t)\,dt\right|\\&\quad+\left|\int_{|t|\geqslant\eta}\{f(x-t)-f(x)\}\varphi_\varepsilon(t)\,dt\right|\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

为估计 I_1, 首先注意到函数 ψ 是径向的(即当 $|x_1|=|x_2|$ 时, $\psi(x_1)=\psi(x_2)$). 如果在 $|x|=r$ 时, 记 $\psi_0(r)=\psi(x)$, 则 $\psi_0(r)$ 是 r 的递降函数. 于是, 若记 E_n 中的单位球体之体积为 Ω_n, 则当 $r\to0$ 或 $r\to\infty$ 时, 我们有

$$\frac{\Omega_n(2^n-1)}{2^n}r^n\psi_0(r)\leqslant\int_{r/2\leqslant|x|\leqslant r}\psi(x)\,dx\to0.$$

就是说, $\lim r^n\psi_0(r)=0$ (当 $r\to0$ 或 $r\to\infty$). 当然存在一常数 A, 使得当 $0<r<\infty$ 时, 有 $r^n\psi_0(r)\leqslant A$. 现令 Σ_{n-1} 表示单位球面 $\{t'\in E_n,\ |t'|=1\}$, 并令 $g(r)=\int_{\Sigma_{n-1}}|f(x-rt')-f(x)|\,dt'$, 此处 dt' 是 Σ_{n-1} 上的面积元. 那么, 条件(i)等价于: 当 $r\leqslant\eta$ 时, 有

$$G(r)=\int_0^r s^{n-1}g(s)\,ds\leqslant\delta r^n.$$

利用这一记法和这些事实, 我们得到

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\int_{|t|<\eta}|f(x-t)-f(x)|\,\varepsilon^{-n}\psi(t/\varepsilon)\,dt\\&=\int_0^\eta r^{n-1}g(r)\,\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)\,dr\\&=G(r)\,\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)\Big|_0^\eta-\int_0^\eta G(r)\,d(\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon))\end{aligned}$$

$$\leqslant \delta r^n \varepsilon^{-n} \psi_0(r/\varepsilon)\Big|_0^\eta - \int_0^{\eta/\varepsilon} G(\varepsilon s)\varepsilon^{-n} d\psi_0(s)$$

$$\leqslant \delta A - \int_0^{\eta/\varepsilon} \delta s^n d\psi_0(s) \leqslant \delta\Big(A - \int_0^\infty s^n d\psi_0(s)\Big).$$

然而, $-\int_0^\infty s^n d\psi_0(s) = n\int_0^\infty s^{n-1}\psi_0(s)\,ds = (n/\omega_{n-1})\int_{E_n}\psi(x)dx.$

这说明存在一个仅依赖于 ψ 的常数 B, 使 $I_1 \leqslant \delta B$.

为估计 I_2, 令 $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$, 并用 χ_η 表示集合 $\{x \in E_n, |x| \geqslant \eta\}$ 的特征函数. 那么对于 $(1/p)+(1/p')=1$, 有

$$I_2 \leqslant \|f\|_p \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'} + |f(x)| \cdot \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_1.$$

又因 $$\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_1 = \int_{|x|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{|x|\geqslant\eta/\varepsilon} \psi(x)\,dx,$$

于是第二项与 ε 同时趋向 0. 我们还可证明第一项也趋于 0. 由于 $p' = 1 + (p'/p)$, 应用 Hölder 不等式, 可得

$$\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'} = \Big(\int_{|x|\geqslant\eta} [\psi_\varepsilon(x)]^{p'} dx\Big)^{1/p'}$$

$$= \Big(\int_{|x|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x)\,[\psi_\varepsilon(x)]^{p'/p} dx\Big)^{1/p'}$$

$$\leqslant \|\chi_\eta\psi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \cdot \|\chi_\eta\psi_\varepsilon\|_1^{1/p'}.$$

但是, 正如我们曾指出过的, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有 $\|\chi_\eta\psi_\varepsilon\|_\infty = \sup\limits_{|x|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x) = \eta^{-n}(\eta/\varepsilon)^n \psi_0(\eta/\varepsilon) \to 0$.

至此, 我们已经证明, 当 ε 足够小时,

$$|(f*\varphi_\varepsilon)(x) - af(x)|$$

以 δ 的一个常数倍为界. 这个常数仅仅依赖于 ψ. 由此定理得证. 】

如果 x 是 f 的连续点, 那么它显然属于 f 的 Lebesgue 点集, 因而定理 1.25 对任一这样的点成立. 若 f 在 0 点连续, 则定理 1.25 和 1.26 蕴含

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0).$$

若进一步假定 $\hat{f} \geqslant 0$, 则由 Fatou 引理知 $\hat{f} \in L^1(E_n)$. 于是 (参看定理 1.1 之(b)), 根据推论 1.21 得知, 积分 (1.10) 定义了一个几

乎处处等于 $f(t)$ 的连续函数. 因而得到以下很有用的结论:

推论 1.26 设 $f\in L^1(E_n)$, 且 $\hat{f}\geqslant 0$. 若 f 在 0 点连续, 则 $\hat{f}$ 属于 $L^1(E_n)$, 且对几乎一切 t, 有

$$f(t)=\int_{E_n}\hat{f}(x)e^{2\pi it\cdot x}dx.$$

特别有

$$f(0)=\int_{E_n}\hat{f}(x)\,dx.$$

由上述推论以及定理 1.13 和定理 1.14 中的公式, 立即推知

推论 1.27 (a) $\int_{E_n}W(x,\ \alpha)e^{2\pi it\cdot x}\,dx=e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}$,

(b) $\int_{E_n}P(x,\ \alpha)e^{2\pi it\cdot x}\,dx=e^{-2\pi\alpha|t|}$, 当 $\alpha>0$.

从定理 1.4、推论 1.22 和 1.27, 立刻可得到 Weierstrass 核与 Poisson 核的下述半群性质.

推论 1.28 若 α_1、α_2 是正实数, 则

(a) $W(x,\ \alpha_1+\alpha_2)=\int_{E_n}W(x-t,\ \alpha_1)W(t,\ \alpha_2)\,dt$,

(b) $P(x,\ \alpha_1+\alpha_2)=\int_{E_n}P(x-t,\ \alpha_1)P(t,\ \alpha_2)\,dt$.

§2 L^2 理论和 Plancherel 定理

虽然对 $L^2(E_n)$ 中的一般函数来说, 定义 Fourier 变换的积分不是 Lebesgue 积分, 然而在 $L^2(E_n)$ 中, Fourier 变换有它自然的定义和格外完美的理论.

如果我们假定 f 除可积外, 还是平方可积的, 那么, $\hat{f}$ 也是平方可积的. 实际上, 我们有如下的基本结论:

定理 2.1 若 $f\in L^1\cap L^2$, 则 $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$.

证明 令 $g(x)=\overline{f(-x)}$, 则由定理 1.3, 有 $h=f*g\in L^1(E_n)$; 且由定理 1.4, 有 $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}$. 但因 $\hat{g}=\overline{\hat{f}}$, 于是 $\hat{h}=|\hat{f}|^2$. 再应用推论 1.26, 得出 $\hat{h}\in L^1(E_n)$ 和 $h(0)=\int_{E_n}\hat{h}(x)\,dx$ (这是 Schwarz 不等

式和下面事实的直接结果：当 $\delta\to 0$ 时，L^2 中连续模 $\omega_2(f;\ \delta)$ 趋于 0；L^2 中二个函数 $f,\ g$ 的卷积 h 是一致连续的）．于是

$$\int_{E_n}|\hat{f}|^2dx=\int_{E_n}\hat{h}\,dx=h(0)=\int_{E_n}f(x)g(0-x)\,dx$$
$$=\int_{E_n}f(x)\overline{f(x)}\,dx=\int_{E_n}|f|^2dx.$$ 】

这一定理说明，Fourier 变换是定义在 $L^2(E_n)$ 的稠密子集 $L^1\cap L^2$ 上的有界线性算子（实际是等距算子）．所以，它存在一个到全空间 L^2 的唯一的有界扩张 $\mathscr{F}$．$\mathscr{F}$ 称为 L^2 上的 Fourier 变换，并仍用记号 $\hat{f}=\mathscr{F}f$ 来表示（当 $f\in L^2(E_n)$ 时）．

一般说来，据此定义，对于 $f\in L^2(E_n)$，它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 就是序列 $\{\hat{h}_k\}$ 依 L^2 范数的极限，其中 $\{h_k\}$ 是 $L^1\cap L^2$ 中按 L^2 范数收敛于 f 的任一序列．为方便起见，$\{h_k\}$ 可以这样选择，当 $|t|\leqslant k$ 时，$h_k(t)$ 等于 $f(t)$，而在其他地方为 0．这时，

(2.2) $$\hat{h}_k(x)=\int_{|t|<k}f(t)e^{-2\pi ix\cdot t}\,dt=\int_{E_n}h_k(t)e^{-2\pi ix\cdot t}\,dt,$$

那么，$\hat{f}$ 就是 $\{\hat{h}_k\}$ 在 L^2 中的极限．

我们称一个把 $L^2(E_n)$ 映到 $L^2(E_n)$ 上的等距线性算子为酉算子．由定理 2.1 立刻可知 $\mathscr{F}$ 是等距的．此外，还可知它是映于上的．

定理 2.3 Fourier 变换是 $L^2(E_n)$ 上的酉算子．

证明 因 $\mathscr{F}$ 是等距的，所以它的值域必是 $L^2(E_n)$ 的一个闭子空间．如果它不是全空间 $L^2(E_n)$，我们就能找到一个函数 g，使 $\|g\|_2\neq 0$，而对一切 $f\in L^2(E_n)$，有 $\int_{E_n}\hat{f}g\,dx=0$．显然，乘法公式（定理 1.15）可以推广到 L^2．因而，对一切 $f\in L^2$，$\int_{E_n}f\hat{g}\,dx=\int_{E_n}\hat{f}g\,dx=0$．由此推出 $\hat{g}(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$．这与 $\|g\|_2=\|\hat{g}\|_2\neq 0$ 矛盾．】

定理 2.3 是 L^2 的 Fourier 变换理论中下述基本定理的主要部分：

定理 2.4 对一切 $g\in L^2(E_n)$，令 $(\mathscr{F}^{-1}g)(x)=(\mathscr{F}g)(-x)$，

则此 $\mathscr{F}^{-1}$ 是 Fourier 变换的逆变换.

定理 2.3 和 2.4 通常称为 Plancherel 定理. 定理 2.4 的证明可以如下实现: 将 $\mathscr{F}^{-1}\hat{f}$ 表示为序列 $f_k(t)$ 的 L^2 极限. 其中,

$$f_k(t)=\int_{|x|<k}\hat{f}(x)e^{2\pi it\cdot x}dx. \tag{2.5}$$

首先来证明该定理对 $\hat{f}\in L^1\cap L^2$ (值域的一个稠密子集) 是正确的. 为此, 只需验证 $\mathscr{F}^{-1}\hat{f}$ 的表达式与 $\mathscr{F}^*\hat{f}$ 一致[11]. 而这一点是显然的, 因为若令 $\tilde{f}(t)=\int_{E_n}\hat{f}(x)\,e^{2\pi it\cdot x}\,dx=\lim_{k\to\infty}f_k(t)$ (在 L^2 中), 则对一切 $g\in L^1\cap L^2$ 有

$$\begin{aligned}(g,\tilde{f})&=\int_{E_n}g(t)\overline{\left(\int_{E_n}\hat{f}(x)\,e^{2\pi it\cdot x}\,dx\right)}dt\\&=\int_{E_n}\left(\int_{E_n}g(t)\,e^{-2\pi ix\cdot t}\,dt\right)\overline{\hat{f}(x)}\,dx\\&=(\mathscr{F}g,\,\hat{f}).\end{aligned}$$

这就是说, 对一切 $g\in L^1\cap L^2$, 有 $(g,\tilde{f})=(\mathscr{F}g,\mathscr{F}f)=(g,f)$, 因而 $\tilde{f}=f$. 至于定理的一般情形, 可用建立(2.2)的办法来证明.

因此我们看出, 在 L^2 中, Fourier 变换的反演问题, 有非常简单而完美的解答. 鉴于前一节的内容, 这里自然要问, 在涉及求和概念下是否同样存在着一个解. 例如, 作为 x 的函数, $e^{-\varepsilon|x|}$ 平方可积, 故积分(1.10)的Abel 平均有意义. 那么它是否收敛于 f 呢(依 L^2 范数或几乎处处)? 回答是肯定的. 我们可以从定理 1.18 和定理 1.25 以及对 $L^2(E_n)$ 也成立的定理 1.16 立即推得. 而后者可以用推广到 L^2 的乘法公式(定理 1.15), 有如证明定理 1.16 那样来证明.

有了 $L^1(E_n)$ 和 $L^2(E_n)$ 上函数 Fourier 变换的定义后, 我们就容易对 $L^1(E_n)+L^2(E_n)$ 类来定义 Fourier 变换, 这里 $L^1(E_n)+L^2(E_n)=\{f\,|\,f=f_1+f_2,\ f_1\in L^1(E_n);\ f_2\in L^2(E_n)\}$. 为此, 定

---

11) 把 $L^2(E_n)$ 看作具有内积 $(f,g)=\int_{E_n}f\bar{g}\,dx$ 的 Hilbert 空间, 并认为读者熟悉下述事实: 若 T 是酉算子, T^{-1} 等于共轭算子 T^* (即对一切 $f,g\in L^2(E_n)$, 满足 $(Tf,g)=(f,T^*g)$ 的算子). 则算子 T 保持内积: $(Tf,Tg)=(f,g)$.

义 $(f_1+f_2)^\wedge=\hat{f}_1+\hat{f}_2$. 这样，如果 $g_i\in L^1(E_n)$, $i=1, 2$; $g_1+g_2=f_1+f_2$, 就有 $g_1-f_1=f_2-g_2\in L^1\cap L^2$. 由于 Fourier 变换的两个定义在 $L^1\cap L^2$ 上一致，所以有 $\hat{g}_1-\hat{f}_1=\hat{f}_2-\hat{g}_2$. 于是 $\hat{f}_1+\hat{f}_2=\hat{g}_1+\hat{g}_2$. 这说明 $L^1(E_n)+L^2(E_n)$ 上 Fourier 变换的定义是有意义的. 由于这后一空间包含一切空间 $L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, 因此，对一切 $f\in L^p(E_n)$, Fourier 变换就有定义. 容易验证，Fourier 变换的反演问题同样可用 Abel 平均或 Gauss 平均的办法解决. 类似地，定理 1.4 有下述推广.

定理 2.6 若 $f\in L^1(E_n)$, $g\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, 则 $h=f*g$ 属于 $L^p(E_n)$ (参看定理 1.3), 且对几乎一切 x, 有

$$\hat{h}(x)=\hat{f}(x)\hat{g}(x).$$

在下一节，我们要进一步扩展 Fourier 变换的定义. 我们将会看到，这个扩展了的 Fourier 变换定义用到 $L^p(E_n)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ 空间上，与刚才给出的定义是一致的.

§3 缓变广义函数类

广义函数的核心思想是把它们作为某个正则函数空间——即所谓"测试函数"空间——上的线性泛函来考虑，并假定"测试函数"空间对我们一直研究着的运算(如微分，Fourier 变换，卷积，平移等)具有良好的性态，然后让它反映在广义函数的性质里. 我们很自然地从下述考虑来确定测试函数空间: 假设我们希望在一个函数空间 $\mathscr{S}$ 上定义上述那些运算，并且使 $\mathscr{S}$ 对这些运算是封闭的. 那么 $\mathscr{S}$ 肯定应包含无限次可微函数. 依(1.9)之(i), 这表明 $\mathscr{S}$ 的每个函数乘以多项式后仍应属于 $\mathscr{S}$. 因此，我们定义: 测试函数空间 $\mathscr{S}$ 是由 E_n 上所有 C^∞ 函数 φ 之满足

$$\sup_{x\in E_n}|x^\alpha(D^\beta\varphi)(x)|<\infty \tag{3.1}$$

者所构成，其中 C^∞ 表示 E_n 上各阶偏导数存在且连续的函数类，α、β 是 n 元非负整数组 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ (我们仍沿用(1.9)中的记号). 例如，$\varphi(x)=e^{-\delta|x|^2}$, $\delta>0$, 属于 $\mathscr{S}$, 而

$\varphi(x)=e^{-\delta|x|}$ 在原点不可微，故不属于 $\mathscr{S}$. C^∞ 中具有紧支集的函数的空间 $\mathscr{D}$ 是包含在 $\mathscr{S}$ 中的.

$\mathscr{D}$ 非空并不显然. 为指出 $\mathscr{D}$ 中的一个函数，考虑函数 $f(t)=e^{-1/t}$，当 $t>0$; $f(t)=0$，当 $t\leqslant 0$. 则 $f\in C^\infty$，且 f 及其各阶导数有界. 令 $\varphi(t)=f(1+t)f(1-t)$，则当 $|t|<1$ 时，函数 $\varphi(t)=e^{-2/(1-t^2)}$，在其它地方为 0. 显然，$\varphi(t)\in\mathscr{D}=\mathscr{D}(E_1)$. 从 φ 容易得到 n 维函数:

(a) 对 $x\in E_n$，令 $\psi(x)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)$，则 $\psi\in\mathscr{D}=\mathscr{D}(E_n)$.

(b) 对 $x\in E_n$，令 $\psi(x)=\begin{cases}e^{-2/(1-|x|^2)}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$

则 $\psi\in\mathscr{D}=\mathscr{D}(E_n)$.

(c) 若 $\eta\in C^\infty$，ψ 是(b)中之函数，则 $\psi(\varepsilon x)\eta(x)$ 属于 $\mathscr{D}(E_n)$，且当 $\varepsilon\to 0$ 时，$e^2\psi(\varepsilon x)\eta(x)\to\eta(x)$ (见后文(3.9)).

在(3.1)中，两种运算——微分及乘以 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 的幂——的次序是可以颠倒的. 就是说，$\varphi\in\mathscr{S}$，当且仅当对一切非负 n 元整数组 α,β，$\sup\limits_{x\in E_n}|D^\beta(x^\alpha\varphi(x))|<\infty$. 这说明，若 P 是 n 元多项式，且 $\varphi\in\mathscr{S}$，则 $P(x)\varphi(x)$ 和 $P(D)\varphi(x)$ 都仍属于 $\mathscr{S}$.

空间 C_0 和 $L^p(E_n)$，$1\leqslant p<\infty$，皆包含 $\mathscr{S}$. 且 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{D}$ 都是 C_0 和 $L^p(E_n)$ 的稠密子空间. 对 $\varphi\in\mathscr{S}$，$\|\varphi\|_p$ 以形如 $\|x^\alpha\varphi(x)\|_\infty$ 的有限线性组合为界. 这是因为: 令 $A=\|\varphi\|_\infty$，$B=\sup\limits_{x\in E_n}|x|^{2n}|\varphi(x)|$ (由(3.1)知 $B<\infty$). 于是对 $1\leqslant p<\infty$，

$$\begin{aligned}\left(\int_{E_n}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}&\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&\quad+\left(\int_{|x|>1}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant A\left(\int_{|x|\leqslant 1}1dx\right)^{1/p}\\&\quad+B\left(\int_{|x|>1}|x|^{-2np}dx\right)^{1/p}\\&=A\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{1/p}+B\left(\frac{\omega_{n-1}}{(2p-1)n}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

上式说明，用 $\|x^\alpha\varphi(x)\|_\infty$ 的线性组合来控制 $\|\varphi\|_p$ 时，其系数和指数 α 与 φ 无关.

从(1.9)之(ii)容易得知，当 $\varphi\in\mathscr{S}$ 时，有 $\hat{\varphi}\in C^\infty$. 再结合 (i) 便得到 $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$. 即

定理 3.2 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，则 $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$.

实际上，在第一节中讨论 Fourier 变换的反演问题时，我们就可看出 Fourier 变换必须是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 上的一一映射.

如果 φ, ψ 皆属于 $\mathscr{S}$，则定理 3.2 告诉我们：$\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ 皆属于 $\mathscr{S}$，因而 $\hat{\varphi}\hat{\psi}$ 属于 $\mathscr{S}$. 由于 $(\varphi*\psi)^\wedge=\hat{\varphi}\hat{\psi}$，应用 Fourier 逆变换可以证明：

定理 3.3 若 φ, ψ 属于 $\mathscr{S}$，则 $\varphi*\psi$ 也属于 $\mathscr{S}$.

现对 $\mathscr{S}$ 引进一种度量，使之成为一个拓扑向量空间. 为此，我们引进可数范数族 $\{\rho_{\alpha\beta}\}$，以 n 元非负整数组 α,β 之序偶 (α,β) 为下标. 鉴于(3.1)，对每一序偶规定：对 $\varphi\in\mathscr{S}$，

$$\rho_{\alpha\beta}(\varphi)=\sup_{x\in E_n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|.$$

若令 $d'_{\alpha\beta}(\varphi,\psi)=\rho_{\alpha\beta}(\varphi-\psi)$，则 $d'_{\alpha\beta}$ 是 $\mathscr{S}$ 上的一个度量. 把这些度量排成序列 d'_1, d'_2, $\cdots$，再令 $d_n=d'_n/(1+d'_n)$, $n=1, 2, \cdots$，则 d_n 是等价于 d'_n 的度量(即两个度量确定 $\mathscr{S}$ 上的同一拓扑)，且有 $d_n\leqslant 1$. 因而 $d=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}d_n$ 是 $\mathscr{S}$ 上的一个度量. 这就是我们用以定义 $\mathscr{S}$ 的拓扑的度量. 显然，当 $k\to\infty$ 时，$\varphi_k\to\varphi$ (关于 d)当且仅当 $\varphi_k\to\varphi$(关于每个 d_n). 由此得出向量空间的运算 $(\varphi,\psi)\to\varphi+\psi$ 以及 $(\alpha,\varphi)\to\alpha\varphi$($\alpha$ 是复数)是连续的. 因此 $(\mathscr{S}, d)$ 是一个拓扑向量空间.

关于 $\mathscr{S}$ 及其拓扑的一些容易确立的性质列述如下：

(3.4) 映射 $\varphi(x)\to x^\alpha D^\beta\varphi(x)$ 是连续的.

(3.5) 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\tau_h\varphi=\varphi$.

(3.6) 设 $\varphi\in\mathscr{S}$, $h=(0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$ 位于 E_n 的第 i 个坐标轴上，则当 $|h|\to 0$ 时，差商 $[\varphi-\tau_h\varphi]/h_i\to\partial\varphi/\partial x_i$.

(3.7) $\mathscr{S}$ 是完备度量空间.

(3.8) Fourier 变换是 $\mathscr{S}$ 到自身的同胚.

(3.9) $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{S}$ 的稠密子集.

(3.10) $\mathscr{S}$ 是可分的.

$\mathscr{S}$ 上所有连续线性泛函的集 $\mathscr{S}'$ 称为缓变广义函数空间. 我们举几个缓变广义函数的例子.

(1) 令 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 定义泛函 $L=L_f$ 如下:

$$L(\varphi)=L_f(\varphi)=\int_{E_n}f(x)\varphi(x)\,dx,\ \varphi\in\mathscr{S}.$$

显然, L_f 是 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函. 为证其连续性, 只需证明它在原点连续即可. 于是假设当 $k\to\infty$ 时, $\varphi_k\to 0$(在 $\mathscr{S}$ 中). 我们已经知道, 对任一 $q\geqslant 1$, $\|\varphi_k\|_q$ 由形如 $\|x^\alpha\varphi_k(x)\|_\infty$ 的有限线性组合所控制(该线性组合的系数和指数 α 仅依赖于 n 和 q, 而与 φ_k 无关). 就是说, $\|\varphi_k\|_q$ 被 φ_k 的 $\rho_{\alpha 0}$ 范数的有限线性组合所控制. 因此, 在 $k\to\infty$ 时, 有 $\|\varphi_k\|_q\to 0$. 取 q 使 $1/p+1/q=1$, 利用 Hölder 不等式, 有 $|L(\varphi_k)|\leqslant\|f\|_p\|\varphi_k\|_q\to 0(k\to\infty)$. 于是 $L\in\mathscr{S}'$.

(2) 若 μ 是有限 Borel 测度, 如下定义的泛函 $L=L_\mu$ 是缓变广义函数:

$$L(\varphi)=L_\mu(\varphi)=\int_{E_n}\varphi(x)\,d\mu(x),\ \varphi\in\mathscr{S}.$$

(证明同上例, 只需取 $q=\infty$).

(3) 一个可测函数 f, 若对某正整数 k, 具有性质:

$$f(x)/(1+|x|^2)^k\in L^p(E_n),\ 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

则称 f 为缓变的 L^p 函数. (当 $p=\infty$ 时, 亦常称之为缓增函数). 对于每个这样的函数 f, 泛函 $L(\varphi)=\int_{E_n}f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi\in\mathscr{S}$, 是 $\mathscr{S}'$ 的一元. 其证明可根据例(1)得出(将 $L(\varphi)$ 写作

$$L(\varphi)=\int_{E_n}\{(1+|x|^2)^k\varphi(x)\}\cdot\{f(x)/(1+|x|^2)^k\}\,dx,$$

并注意 $\varphi(x)\to(1+|x|^2)^k\varphi(x)$ 是 $\mathscr{S}$ 中的连续映射).

(4) 一个 Borel 测度 μ, 若对某正数 k, 满足

$$\int_{E_n} (1+|x|^2)^{-k} d|\mu|(x) < \infty,$$

则称之为缓变测度. 如例(3)一样, 可以证明

$$L(\varphi) = \int_{E_n} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

定义一个缓变广义函数.

(5) 固定 $x_0 \in E_n$ 和一个 n 元非负整数组 β. 由 $\mathscr{S}$ 的范数 $\rho_{\alpha\beta}$ 的连续性立即可知, 泛函 $L(\varphi) = D^\beta \varphi(x_0)$, $\varphi \in \mathscr{S}$, 确定一个缓变广义函数. 其特殊情形就是 Dirac δ-函数: $L(\varphi) = \varphi(0)$. 它也可以从质量为 1 且集中在原点的缓变测度得到(例 4). 当 $D^\beta = \partial/\partial x_i$ (即 $L(\varphi) = (\partial\varphi/\partial x_i)(0)$)时, 我们得到一个缓变广义函数; 它不是前四例的特殊情形.

例(1)(或更一般地说, 例(3))中的缓变广义函数称作函数. 类似地, 例(2)和例(4)确定的广义函数称作测度. 在这些情况下, 我们把 L_f 和 L_μ 改写作 f 和 μ, 这些函数和测度可以看作是嵌入 $\mathscr{S}'$ 中的. 因为如果赋予 $\mathscr{S}'$ 一个使线性泛函 $L \to L(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S})$ 连续的最弱拓扑, 易知 $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 连续地嵌入 $\mathscr{S}'$. 对 E_n 上所有有限 Borel 测度空间也如是(它是具有范数 $\|\mu\| = \int_{E_n} d|\mu|$ 的 Banach 空间).

缓变广义函数有一个简单而重要的特征:

定理 3.11 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函 L 是缓变广义函数, 当且仅当存在常数 C 和整数 m、l, 使得对一切 $\varphi \in \mathscr{S}$, 有

$$|L(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi).$$

证明 显然, C、l、m 的存在蕴含 L 的连续性.

若设 L 是连续的, 则根据度量的定义知: 对 $\varepsilon > 0$ 和整数 m、l, 集族 $N_{\varepsilon,l,m} = \{\varphi;\ \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi) < \varepsilon\}$ 是 $\mathscr{S}$ 的原点的邻域基(因为在该邻域系——及其平移——所导出的拓扑中, $\varphi_k \to \varphi$ $(k \to \infty)$ 当且仅当对一切 (α, β) 有 $\rho_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi) \to 0$.) 那么, 存在一集 $N_{\varepsilon,l,m}$, 使得对一切 $\varphi \in N_{\varepsilon,l,m}$, 有 $|L(\varphi)| \leqslant 1$. 现在, 对一切 $\varphi \in$

$\mathscr{S}$, 令 $\|\varphi\|=\sum_{|\alpha|\le l,|\beta|\le m}\rho_{\alpha\beta}(\varphi)$. 若 $0<\bar{\varepsilon}<\varepsilon$, 则有 $\psi=(\bar{\varepsilon}/\|\varphi\|)\varphi\in N_{\varepsilon,l,m}$(当 $\varphi\neq 0$). 再依 L 的线性性质可知

$$(\bar{\varepsilon}/\|\varphi\|)|L(\varphi)|=L(\psi)\leqslant 1.$$

而这就是要证明的不等式,其中 $C=1/\bar{\varepsilon}$. 】

现在,我们指出,一些重要的分析运算(微分、卷积、Fourier 变换等等)可以在 $\mathscr{S}'$ 上定义. 首先定义广义函数同测试函数的卷积.

为此目的,对 E_n 上任一函数 g, 定义它的反射(函数) $\tilde{g}$: $\tilde{g}(x)=g(-x)$. 当 u、φ、ψ 都属于 $\mathscr{S}$ 时,直接应用 Fubini 定理可得

$$\int_{E_n}(u*\varphi)(x)\psi(x)\,dx=\int_{E_n}u(x)(\tilde{\varphi}*\psi)(x)\,dx.$$

我们知道, 映射 $\psi\to\int_{E_n}(u*\varphi)(x)\psi(x)\,dx$ 和 $\theta\to\int_{E_n}u(x)\,\theta(x)\,dx$ 都是 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函. 如果分别以 $u*\varphi$ 和 u 表之,则上述等式可写为

$$(u*\varphi)(\psi)=u(\tilde{\varphi}*\psi). \tag{3.12}$$

如果 $u\in\mathscr{S}'$ 且 φ、$\psi\in\mathscr{S}$, 由于 $\tilde{\varphi}*\psi\in\mathscr{S}$, 故上式右端是有意义的. 此外,映射 $\psi\to u(\tilde{\varphi}*\psi)$ 由两个连续函数合成,因而也是连续的. 于是可以用(3.12)来定义广义函数 u 同测试函数 φ 的卷积.

容易证明,当 $u\in\mathscr{S}'$ 且 φ、$\psi\in\mathscr{S}$ 时, 有 $(u*\varphi)*\psi=u*(\varphi*\psi)$, 即卷积满足结合律. 下面来刻划这种卷积的特征.

定理 3.13 若 $u\in\mathscr{S}'$, $\varphi\in\mathscr{S}$, 则 $u*\varphi$ 是一个函数 f, 它在 $x\in E_n$ 的值为 $f(x)=u(\tau_x\tilde{\varphi})$, 其中 τ_x 为平移 x 的算子. 此外, f 属于 C^∞, 它同它的所有导数都是缓增的.

证明 先证 f 是属于 C^∞ 的缓增函数. 令 $h=(0,\cdots,h_j,\cdots 0)$, 依(3.6)知, 在 $\mathscr{S}$ 的拓扑中, $[\tau_{x+h}\tilde{\varphi}-\tau_x\tilde{\varphi}]/h_j\to-\tau_x(\partial\tilde{\varphi}/\partial x_j)$ (当 $|h|\to 0$). 于是,由 u 的连续性,当 $h_j\to 0$ 时,有 $[f(x+h)-f(x)]/h_j=u([\tau_{x+h}\tilde{\varphi}-\tau_x\tilde{\varphi}]/h_j)\to u[-\tau_x(\partial\tilde{\varphi}/\partial x_j)]$. 由此,再利用(3.5)就说明 f 有连续的一阶偏导数. 又由于 $\partial\tilde{\varphi}/\partial x_j\in\mathscr{S}$, 重复上述过程就可证明: 对一切 n 元非负整数组 β, $D^\beta f$ 存在且连续, 而且有

$(D^\beta f)(x)=(-1)^{|\beta|}u(\tau_x D^\beta\tilde{\varphi})$，其中 $|\beta|=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$. 继而因为 $D^\beta\tilde{\varphi}\in\mathscr{S}$，故只要 f 是缓增的，f 的各阶导数亦将缓增. 但 f 是缓增的这一事实是定理 3.11 的推论：存在 $C>0$ 和整数 l、m，使得

$$|f(x)|=|u(\tau_x\tilde{\varphi})|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant l,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha\beta}(\tau_x\tilde{\varphi}).$$

这里，

$$\rho_{\alpha\beta}(\tau_x\tilde{\varphi})=\sup_{w\in E_n}|w^\alpha(D^\beta\tilde{\varphi})(w-x)|=\sup_{w\in E_n}|(w+x)^\alpha(D^\beta\tilde{\varphi})(w)|.$$

而后者显然以 x 的多项式为界.

为了证明 $u*\varphi$ 是函数 f，必须证明

$$(u*\varphi)(\psi)=\int_{E_n}\psi(t)f(t)\,dt.$$

而
$$(u*\varphi)(\psi)=u(\tilde{\varphi}*\psi)=u\left(\int_{E_n}\tilde{\varphi}(x-t)\psi(t)\,dt\right)$$
$$=u\left(\int_{E_n}(\tau_t\tilde{\varphi})(x)\psi(t)\,dt\right).$$

另一方面，容易验证上述积分的 Riemann 和依 $\mathscr{S}$ 的拓扑收敛. 于是，依 u 的线性与连续性，有

$$u\left(\int_{E_n}(\tau_t\tilde{\varphi})(x)\psi(t)\,dt\right)=\int_{E_n}u(\tau_t\tilde{\varphi})\psi(t)\,dt=\int_{E_n}f(t)\psi(t)\,dt.$$

此即欲证之等式. 】

现在，考查 $\mathscr{S}'$ 中的微分. 首先我们看出，当 u、$\varphi\in\mathscr{S}$ 时，由分部积分可得

$$\int_{E_n}(D^\beta u)(x)\varphi(x)\,dx=(-1)^{|\beta|}\int_{E_n}u(x)(D^\beta\varphi)(x)\,dx.$$

而映射 $\varphi\to\int_{E_n}(D^\beta u)(x)\varphi(x)\,dx$ 和 $\psi\to\int_{E_n}u(x)\psi(x)dx$ 是 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函，记作 $(D^\beta u)$ 和 u. 那么，前面的等式就可写成

(3.14) $$(D^\beta u)(\varphi)=(-1)^{|\beta|}u(D^\beta\varphi).$$

其右端对 $u\in\mathscr{S}'$，$\varphi\in\mathscr{S}$ 是有意义的，且 $\varphi\to u(D^\beta\varphi)$ 是 $\mathscr{S}$ 上的连续映射(由两个连续函数复合而成). 因此，我们可以借助于(3.14)来定义广义函数的偏导数 $D^\beta u$. 而且显然 $D^\beta u$ 属于 $\mathscr{S}'$.

我们仍然先考查 $u, \varphi\in\mathscr{S}$ 的情形，引进下述二个定义：对 $u\in\mathscr{S}'$，用 $\tau_h u$ 定义 $\mathscr{S}'$ 上的平移算子 τ_h：它是 $\mathscr{S}$ 上的一个线性泛函，它在 φ 的值由 $(\tau_h u)(\varphi)=u(\tau_{-h}\varphi)$ 给出．对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，令 $\tilde{u}(\varphi)=u(\tilde{\varphi})$，我们就得到广义函数 u 的反射 $\tilde{u}$.

根据乘法公式(定理 1.15)，对一切 $u, \varphi\in\mathscr{S}$，我们有 $u(\hat{\varphi})=\int_{E_n}u(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=\int_{E_n}\hat{u}(x)\varphi(x)\,dx=\hat{u}(\varphi)$．因此，定义广义函数 u 的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 为如下的线性连续泛函：

$$\hat{u}(\varphi)=u(\hat{\varphi}),\ \varphi\in\mathscr{S}. \tag{3.15}$$

我们看到，若 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant 2$，它的 Fourier 变换作为广义函数，与第二节[12]末所定义的函数 $\hat{f}$ 是一致的．容易验证，这样定义的 Fourier 变换是拓扑向量空间 $\mathscr{S}'$ 到自身的同构.

现在，我们用广义函数的上述事实来研究 Fourier 分析中的基本线性算子类——与平移可交换的算子类．不过在一般 L^p 空间上刻划这类算子的特征，尚是一个未解决的问题．我们仅就某些有意义的特殊情形给以解答.

设 V, W 分别是 E_n 上函数的线性空间，B 是将 V 映入 W 的算子．若对一切 $h\in E_n$，$\tau_h B=B\tau_h$，则称 B 与平移可交换．举例如下：固定 $f\in L^p(E_n)$，定义 $Bg=f*g$，$g\in L^1(E_n)$．由定理 1.3 知，B 是将 $L^1(E_n)$ 映入 $L^p(E_n)$ 的有界算子(有 $\|B\|\leqslant\|f\|_p$)，经变量代换，$\tau_h(Bg)=B(\tau_h g)$ 对一切 $g\in L^1(E_n)$ 成立．下面将要给出的结果表明：与平移可交换的"所有"有界算子都是"卷积型"的.

定理 3.16 设算子 B 是 $L^p(E_n)\to L^q(E_n)$ $(1\leqslant p,\ q\leqslant\infty)$ 的与平移可交换的有界线性算子．则存在唯一的缓变广义函数 u，使得对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，有 $B\varphi=u*\varphi$[13].

12) 对于 $p>2$ 的情形，请看下文(4.13).

13) 为简明起见，考虑 $n=1$ 的情形．适当取 Riemann 和可看出，若 u 是性质很好的函数，则 $(B\varphi)(x)$ 可用线性组合

$$\sum_{k=1}^{n}u(t_k)(t_k-t_{k-1})\varphi(x-t_k)=\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi(x-t_k)$$

逼近．就是说，B 可用平移算子的有限线性组合来逼近．定理 3.16 明确表明，一切与平移可交换的有界线性算子都可以这样来逼近.

此定理是下述引理的推论.

引理 3.17 若 $f\in L^p(E_n)$，且按照 L^p 的范数，f 有 $\leqslant n+1$ 的各阶导数. 那么 f 几乎处处等于一个连续函数 g，满足

$$|g(0)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_p,$$

此处 C 仅依赖于维数 n 和指标 p.

证明 令 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E_n$. 则存在 $C'=C'_n$，使得

$$(1+|x|^2)^{(n+1)/2}\leqslant(1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^{n+1}\leqslant C'\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|x^\alpha|.$$

先考虑 $p=1$ 的情形. 由(1.9)之(ii)和定理 1.1 之(a)，有

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)|&\leqslant C'(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|x^\alpha||\hat{f}(x)|\\&=C'(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|((2\pi)^{-|\alpha|}D^\alpha f)\hat{}\,(x)|\\&\leqslant C''(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_1.\end{aligned}$$

由于 $(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}$ 是 E_n 上的一个可积函数，故 $\hat{f}\in L^1(E_n)$. 现取 $C=C''\int_{E_n}(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}dx$，便有

$$\|\hat{f}\|_1\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_1.$$

根据推论 1.21，就得知 f 几乎处处等于连续函数 g. 再依定理 1.1 之(a)，便知

$$|g(0)|\leqslant\|f\|_\infty\leqslant\|\hat{f}\|_1\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_1.$$

再考虑 $p>1$ 的情形. 取 φ，使 $\varphi\in C^\infty$，且 $|x|\leqslant 1$ 时 $\varphi(x)=1$，$|x|>2$ 时 $\varphi(x)=0$. 则 φf 满足 $p=1$ 时引理的条件. 于是 φf 几乎处处等于一个连续函数 h，使得

$$|h(0)|=C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha(\varphi f)\|_1.$$

因为 $D^\alpha(\varphi f)\sum_{\mu+\nu=\alpha}C^{\mu\nu}(D^\mu f)(D^\nu\varphi)$，故得

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\varphi f)\|_1&\leqslant\int_{|x|\leqslant 2}\sum_{\mu+\nu=\alpha}C^{\mu\nu}|D^\mu f|\cdot|D^\nu\varphi|\,dx\\&\leqslant\sum_{\mu+\nu=\alpha}C\{\sup_{|x|\leqslant 2}|(D^\nu\varphi)(x)|\}\int_{|x|\leqslant 2}|D^\mu f(x)|\,dx\end{aligned}$$

$$\leqslant A\sum_{|\nu|\leqslant|\alpha|}\int_{|x|\leqslant 2}|D^\nu f(x)|\,dx\leqslant AB\sum_{|\nu|\leqslant|\alpha|}\|D^\nu f\|_p,$$

其中,当 $|\nu|\leqslant|\alpha|$ 时,$A\geqslant\|D^\nu\varphi\|_\infty$,且 B 仅依赖于 p 和 n. 这样就找到了常数 K,使得

$$|h(0)|\leqslant K\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_p.$$

因为 $|x|\leqslant 1$ 时,$\varphi(x)=1$, 所以, 在以 0 为心, 半径为 1 的球内,f 几乎处处等于一个连续函数 g, 且

$$|g(0)|=|h(0)|\leqslant K\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_p.$$

于是,只要适当选择 φ,就可证明在以 0 为心的任何球上,f 几乎处处等于一个连续函数. 引理得证. 】

现在回来证明定理 3.16. 首先注意到, 对 $\varphi\in\mathscr{S}$, $B\varphi$ 按 L^q 范数具有各阶导数. 这是因为,设 $h=(0,\cdots,h_j,\cdots,0)$ 位于第 j 个坐标轴上, 我们有 $(\tau_h(B\varphi)-B\varphi)/h_j=(B(\tau_h\varphi)-B\varphi)/h_j=B((\tau_h\varphi-\varphi)/h_j))$. 而由于 $(\tau_h\varphi-\varphi)/h_j$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $-\varphi_j=-\partial\varphi/\partial x_j$,故 $(\tau_h\varphi-\varphi)/h_j$ 在 L^p 中也收敛于 $-\varphi_j=-\partial\varphi/\partial x_j$. 又因 B 是 L^p 到 L^q 的有界算子, 故 $(\tau_h(B\varphi)-B\varphi)/h_j$ 按 L^q 范数收敛于 $-\partial(B\varphi)/\partial x_j$. 重复这一过程就可证明 $B\varphi$ 按 L^q 范数有各阶导数. 显然, 对所有 n 元非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 有 $B(D^\alpha\varphi)=D^\alpha(B\varphi)$. 因此,由引理 3.17, $B\varphi$ 几乎处处等于一个连续函数 g_φ,满足条件

$$\begin{aligned}|g_\varphi(0)|&\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha(B\varphi)\|_q\\&=C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|B(D^\alpha\varphi)\|_q\\&\leqslant\|B\|C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha\varphi\|_p.\end{aligned}$$

上述不等式说明, $\varphi\to g_\varphi(0)$ 是一个定义在 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函 u_1 (这是由于定理 3.11 以及本节开始时所说: 对于 $\psi\in\mathscr{S}$, $\|\psi\|_p$ 由形如 $\|x^\alpha\psi(x)\|_\infty$ 的有限线性组合控制). 我们断言 $u=\tilde{u}_1$ 就是所要找的线性泛函. 事实上, 当 $\varphi\in\mathscr{S}$ 时, 应用定理 3.13, 可得 $(u*\varphi)(x)=u(\tau_x\tilde{\varphi})=u([\tau_{-x}\varphi]^\sim)=\tilde{u}(\tau_{-x}\varphi)=u_1(\tau_{-x}\varphi)=$

$(B(\tau_{-x}\varphi))(0)=(\tau_{-x}B\varphi)(0)=(B\varphi)(x)$[14].

由于 u 是这样构造的，所以它是唯一的．因此定理证毕． 】

定理 3.16 连同定理 3.13 说明，对于 $\varphi\in\mathscr{S}$，$B\varphi$ 几乎处处等于 C^∞ 中的一个函数，该函数及其各阶导数都是缓增的．

记 (L^p, L^q) 是缓变广义函数的一个类，其中的广义函数 u 具有性质：存在 $A>0$，使对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，有 $\|u*\varphi\|_q\leqslant A\|\varphi\|_p$．当 $p<\infty$ 时，定理 3.16 给出一个从 L^p 到 L^q 且与平移可交换的有界线性算子类同 (L^p, L^q) 之间的一一对应（算子 $\varphi\to u*\varphi$ 与平移的可交换性，可由定理 3.13 看出）．当 $p=q=2$ 时，我们能够给出广义函数类 (L^2, L^2) 的一个非常简单的表征：

定理 3.18 设 u 为广义函数，$B\varphi=u*\varphi$ 为从 $L^2\cap\mathscr{S}$ 到 L^2 的算子．则 u 属于 (L^2, L^2)，当且仅当存在 $b\in L^\infty(E_n)$，使得 $\hat{u}=b$，此时 $\|b\|_\infty$ 等于算子 B 的范数，且 $(u*\varphi)^\wedge=\hat{u}\hat{\varphi}$．

证明 设 $v\in\mathscr{S}'$，$\psi\in\mathscr{S}$ 定义它们的乘积 $v\psi$ 为 $\mathscr{S}'$ 中之一元：对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，$(v\psi)(\varphi)=v(\psi\varphi)$．如此定义了广义函数与测试函数的乘积后，我们首先考查，当 $u\in\mathscr{S}'$，$\varphi\in\mathscr{S}$ 时，是否有

(i) $$(u*\varphi)^\wedge=\hat{u}\hat{\varphi}.$$

为此，必须说明对一切 $\psi\in\mathscr{S}$，$(u*\varphi)^\wedge(\psi)=(\hat{u}\hat{\varphi})(\psi)$．由定理 1.4 和 Fourier 逆变换公式可立即推知，$\hat{\varphi}\psi$ 是 $\tilde{\varphi}*\hat{\psi}$ 的逆 Fourier 变换．于是根据上述 Fourier 变换和卷积的定义，有 $(u*\varphi)^\wedge(\psi)=(u*\varphi)(\hat{\psi})=u(\tilde{\varphi}*\hat{\psi})=\hat{u}(\hat{\varphi}\psi)=(\hat{u}\hat{\varphi})(\psi)$，因此等式(i)成立．

令 $\varphi_0=e^{-\pi|x|^2}$，则 $\varphi_0\in\mathscr{S}$，且 $\hat{\varphi}_0=\varphi_0$（参看定理 1.13 和脚注 4）．若 $u\in(L^2, L^2)$，则由 Plancherel 定理知，$\Phi_0=\hat{u}\hat{\varphi}_0=(u*\varphi_0)^\wedge\in L^2(E_n)$．取 $b(x)=e^{\pi|x|^2}\Phi_0(x)=\Phi_0(x)/\hat{\varphi}_0(x)$，我们断言对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，有

(ii) $$(u*\varphi)^\wedge=b\hat{\varphi}.$$

由(i)看出，只需说明 $(\hat{u}\hat{\varphi})(\psi)=(b\hat{\varphi})(\psi)$ 对一切 $\psi\in\mathscr{D}$ 成立即可（因 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{S}$ 中稠密）．而当 $\psi\in\mathscr{D}$ 时，有 $(\psi/\hat{\varphi}_0)(x)=\psi(x)e^{\pi|x|^2}\in\mathscr{D}$．于是

14) 我们认为 $B(\tau_{-x}\varphi)$ 与连续函数 $g_{\tau_{-x}\varphi}$ 一致，即几乎处处相等．

$$(\hat{u}\hat{\varphi})(\psi)=\hat{u}(\hat{\varphi}\psi)=\hat{u}(\hat{\varphi}\hat{\varphi}_0\psi/\hat{\varphi}_0)=(\hat{u}\hat{\varphi}_0)(\hat{\varphi}\psi/\hat{\varphi}_0)$$

$$=\int_{E_n}\Phi_0(x)\hat{\varphi}(x)e^{-|x|^2}\psi(x)\,dx$$

$$=\int_{E_n}b(x)\hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx=(b\hat{\varphi})(\psi).$$

由此立即可如下得出 $\hat{u}=b$: 既然对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$ 与 $\psi\in\mathscr{D}$ 有 $\hat{u}(\hat{\varphi}\psi)=(b\hat{\varphi})(\psi)=b(\hat{\varphi}\psi)$, 那么取 φ, 使对 ψ 的支集上的 x, 有 $\hat{\varphi}(x)=1$, 则 $\hat{u}(\psi)=b(\psi)$ 对一切 $\psi\in\mathscr{D}$ 成立. 因此 $\hat{u}=b$.

因为 $u\in(L^2, L^2)$, 故存在 $A>0$, 使对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$, 有 $\|b\hat{\varphi}\|_2=\|(u*\varphi)^\wedge\|_2=\|u*\varphi\|_2\leqslant A\|\varphi\|_2$. 这显然蕴含 $b\in L^\infty(E_n)$ 且 $\|b\|_\infty\leqslant A$(因 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(E_n)$ 中稠密).

反之, 若 $\hat{u}=b\in L^\infty(E_n)$, 由 Plancherel 定理和等式(i)即知, $u\in(L^2, L^2)$. 且 $\|b\|_\infty$ 是算子 B 的范数. 】

对于 $p=1=q$ 的情形, 也可给出 (L^p, L^q) 的一个简单表征:

定理 3.19 设 u 为广义函数, $B\varphi=u*\varphi(\varphi\in\mathscr{S})$ 为 $L^1\cap\mathscr{S}\to L^1$ 的算子. 则 u 属于 (L^1, L^1) 当且仅当它是有限 Borel 测度. 此时, u 的全变差等于算子 B 的范数.

证明 若 u 是有限 Borel 测度, 显然它属于 (L^1, L^1)(见定理 1.3 下面的注释).

反之, 若 $u\in(L^1, L^1)$, 我们考虑 L^1 中的函数类: $\{u_\varepsilon; u_\varepsilon=(u*W(\cdot, \varepsilon)), \varepsilon>0\}$(对每个 $\varepsilon>0$, Gauss-Weierstrass 核属于 $\mathscr{S}$). 那么, 根据对 u 的假定和引理 1.17 之(a), 有 $\|u_\varepsilon\|_1\leqslant A\|W(\cdot, \varepsilon)\|_1=A$. 即 $\{u_\varepsilon\}$ 按 L^1 范数一致有界. 现设 $M=M(E_n)$ 是 E_n 上有限 Borel 测度空间, 把 $L^1(E_n)$ 视为嵌入在 Banach 空间 M 中[15]. 又 $M(E_n)$ 可以和 $C_0=C_0(E_n)$ 的对偶空间等同: 只需让每个 $\mu\in M$ 与线性泛函 $\int_{E_n}\varphi(x)\,d\mu(x)(\varphi\in C_0)$ 相对应. 那么 M 的单位球对弱*拓扑是紧的[16]. 特别可以找到 $\mu\in M$ 及零序

15) 若 $f\in L^1(E_n)$, F 是 E_n 的可测子集, 则 $\mu(F)=\int_F f(x)\,dx$ 定义了 E_n 上的一个 Borel 有限测度 μ, 它的全变差为 $\|f\|_1$.

16) 即, 能使 C_0 中的 φ 作为 M 的连续线性泛函的最弱拓扑(这里所说的线性泛函是指将 $\mu\in M$ 映成 $\int_{E_n}\varphi(x)\,d\mu(x)$). 详见参考文献.

列$\{\varepsilon_k\}$，使得在这种拓扑中，当$k\to\infty$时，有$u_{\varepsilon_k}\to\mu$. 此即，对每个$\varphi\in C_0$，有

$$\text{(i)}\qquad \lim_{k\to\infty}\int_{E_n}\varphi(x)\,u_{\varepsilon_k}(x)\,dx=\int_{E_n}\varphi(x)\,d\mu(x).$$

下面指出，μ作为广义函数等于u.

为此，必须证明，对一切$\psi\in\mathscr{S}$，有$u(\psi)=\int_{E_n}\psi(x)\,d\mu(x)$. 设$\psi_\varepsilon(x)=\int_{E_n}\psi(x-t)W(t,\varepsilon)\,dt$，则对一切$n$元非负整数组$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，有$(D^\alpha\psi_\varepsilon)(x)=\int_{E_n}(D^\alpha\psi)(x-t)W(t,\varepsilon)\,dt$. 依定理1.18知，$(D^\alpha\psi_\varepsilon)(x)$对$x$一致收敛于$(D^\alpha\psi)(x)$. 因而当$\varepsilon\to0$时，$\psi_\varepsilon\to\psi$（在$\mathscr{S}$中），且由此推出$u(\psi_\varepsilon)\to u(\psi)$. 又因$W(\cdot,\varepsilon)=\widetilde{W}(\cdot,\varepsilon)$，故有

$$\begin{aligned}u(\psi_\varepsilon)&=u(W(\cdot,\varepsilon)*\psi)=(u*W(\cdot,\varepsilon))(\psi)\\&=\int_{E_n}\psi(x)u_\varepsilon(x)\,dx.\end{aligned}$$

于是，置$\varepsilon=\varepsilon_k$，让$k\to\infty$，并令$\varphi=\psi$，利用(i)，就得到所需等式：$u(\psi)=\int_{E_n}\psi(x)\,d\mu(x)$. 定理的余下部份是极易证明的. 】

我们曾说，一般$(L^p,\ L^q)$空间的简单特征是未知的（而且可能不存在）. 但能给出一个一般的对偶性结果.

定理3.20 若$1\leqslant p,\ q\leqslant\infty,\ 1/p+1/p'=1,\ 1/q+1/q'=1$，则$(L^p,\ L^q)=(L^{q'},\ L^{p'})$.

证明 利用Riesz表示定理，可以使$L^{p'}$，$L^{q'}$分别与L^p，L^q之对偶空间等同（当$p,\ q<\infty$时，这是正确的. 若$p,\ q$有一为∞，只需对证明稍作修改，仍能证明其正确性）. 设$u\in(L^p,\ L^q)$，并设$L^p\to L^q$的算子B是映射$\varphi\to u*\varphi\,(\varphi\in\mathscr{S})$在$L^p$上的唯一有界线性扩张. 令$B^*$表示$B$的共轭算子$(L^{q'}\to L^{p'})$. 那么，对一切$\varphi,\ \psi\in\mathscr{S}$，有

$$\int_{E_n}(B\varphi)(\psi)\,dx=\int_{E_n}\varphi(B^*\psi)\,dx.$$

用广义函数的语言来说，这就是等式$(u*\varphi)(\psi)=(B^*\psi)(\varphi)$. 也就

是说，对一切 φ，$\psi\in\mathscr{S}$，有 $(B^*\psi)(\varphi)=u(\tilde{\varphi}*\psi)=u([\tilde{\psi}*\varphi]^{\sim})=\tilde{u}(\tilde{\psi}*\varphi)=(\tilde{u}*\tilde{\psi})(\varphi)$. 因此，对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，$B^*\psi=\tilde{u}*\psi$. 由于 $\|B^*\psi\|_{p'}\leqslant\|B^*\|\|\psi\|_{q'}=\|B\|\|\psi\|_{q'}$，则有 $\tilde{u}\in(L^{q'},L^{p'})$. 又由于 $u\in(L^{q'},L^{p'})$ 的充要条件为 $\tilde{u}\in(L^{q'},L^{p'})$，故知 $(L^p,L^q)\subset(L^{q'},L^{p'})$. $(L^{q'},L^{p'})\subset(L^p,L^q)$ 的证明只需在论证中交换 (p,q) 和 (q',p') 的位置即可得到. 】

§4 进一步的结果

4.1 在证明定理1.2后，我们曾注明："函数属于 C_0"并不是它成为一个可积函数 Fourier 变换的充分条件. 为简单起见，设 $n=1$. 于是阐明这一结论的方法之一是：令 $\hat{f}$ 是如上之 Fourier 变换且为奇函数，那么，对 $1<b<\infty$，必有 $\left|\int_1^b[\hat{f}(x)/x]dx\right|\leqslant A$，其中 A 不依赖于 b. 这是下述熟知事实的直接推论：$\left|\int_\alpha^\beta(\sin x/x)dx\right|\leqslant B<\infty$，$B$ 与 α, β 无关 $(0\leqslant|\alpha|<|\beta|<\infty)$. 实际上，由于 $\hat{f}$ 的奇性，我们有 $\hat{f}(x)=-i\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(2\pi xt)\,dt$. 于是用 Fubini 定理容易导出 $\left|\int_1^b[\hat{f}(x)/x]\,dx\right|\leqslant A$. 因此，为了举例说明 C_0 中有函数不是某可积函数的 Fourier 变换，只需找出一个连续奇函数 g，它在 ∞ 处为 0，但在 $b\to\infty$ 时，$\int_1^b(g(x)/x)\,dx$ 无界. 例如，当 x 较大时，$g(x)=1/\log x$，显然就是这种情况.

4.2 对于固定的 $g\in L^1(E_n)$，考虑算子 B：将 $f\in L^p(E_n)$ 映成 $f*g$. 由定理1.3知，B 是将 $L^p(E_n)$ 映入 $L^p(E_n)$ 的有界线性变换，其范数 $\|B\|^{(p)}$ 由 $\|g\|_1$ 控制. 当 $p=1$ 时，容易证明有 $\|B\|^{(1)}=\|g\|_1$ (因为，按定理1.18，$f_\varepsilon(t)=P(t,\varepsilon)$ 是具有 $\|f_\varepsilon(t)\|_1=1$ 的函数类，且当 $\varepsilon\to0$ 时按 L^1 范数 $f_\varepsilon*g\to g$). 我们已经知道(定理3.18)，$\|B\|^{(2)}=\|\hat{g}\|_\infty$. 因此，自然要问，对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\|B\|^{(p)}$ 如何用 g 表示出来？在一般情况下，还没有满意的答案. 但当 $g\geqslant0$ 时，

$\|g\|_1=|\hat{g}(0)|\leqslant\|\hat{g}\|_\infty\leqslant\|g\|_1$，因而 $\|B\|^{(2)}=\|g\|_1$. 由此以及定理 3.20 和算子插值理论(将在第五章建立)的一个结果(M. Riesz 凸性定理)，推出当 $g\geqslant 0$ 时，$\|B\|^{(p)}=\|g\|_1, 1\leqslant p\leqslant\infty$.

4.3 定理1.3有下述推广：若 $f\in L^p(E_n)$，$g\in L^r(E_n)$，$1\leqslant p, r$，且 $1/p+1/r\geqslant 1$，则 $h=f*g\in L^q(E_n)$，其中 $1/q=1/p+1/r-1$，且有

$$\|h\|_q\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_r.$$

这一结果(通常称为 Young 不等式)的直接证明，可参看 Zygmund [1]，第 II 章，p. 37. 我们将在第五章中指出，这个不等式也容易从 M. Riesz 凸性定理直接推出.

4.4 由下列事实可进一步看清按 L^p 范数的导数的意义：

(a) 当 $n=1$ 时，$f\in L^p(E_n)$ 按 L^p 范数有导数的充分必要条件是 f 几乎处处等于一个局部绝对连续的函数. 它的导数 f' 属于 $L^p(E_1)$(见 Bochner and Chandrasekharan[1]，第 6 节).

(b) 一般说来，$f\in L^p(E_n)$ 按 L^p 范数有第 k 个偏导数的充要条件是 f 作为缓变广义函数有第 k 个偏导数 $(\partial/\partial x_k)f$. 且这偏导数在广义函数的意义下(见(3.14))，是一个 L^p 函数.

4.5 若把 $f\in L^p(E_n)$，$1<p\leqslant\infty$，看作缓变广义函数. 那么，在广义函数意义下存在着的每个一阶偏导数 $(\partial/\partial x_k)f$，$k=1, 2, \cdots, n$，都是 L^p 函数的充分必要条件是

$$\|\tau_h f-f\|_p=\left(\int_{E_n}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=O(|h|).$$

当 $p=1$ 时，其所有一阶偏导数存在并为有限 Borel 测度的充分必要条件是 $\|\tau_h f-f\|_1=O(|h|)$.

4.6 可在有限 Borel 测度空间上定义平移算子 $\tau_h\mu$. μ 是该空间的测度，$\tau_h\mu$ 定义为一测度，它在 Borel 集 F 的值为

$$\mu(F-h)=\mu(\{x\in E_n; x+h\in F\}).$$

于是，测度 μ 是绝对连续的(关于 Lebesgue 测度)的充要条件是，在 $|h|\to 0$ 时，$\tau_h\mu-\mu$ 的全变差趋于 0(见 Bochner [4]).

4.7 若 μ 是离散的有限 Borel 测度，便有

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{x_k},$$

此处 δ_{x_k} 表示凝聚在 x_k 点的 Dirac δ 测度. 这样，从测度(或广义函数) 的 Fourier 变换定义得到 $\hat{\mu}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi i t \cdot x_k}$. 此时有

(i) $$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\Omega_n R^n}\int_{|t|<R} |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

其中，Ω_n 表示 E_n 的单位球的体积. 更一般地说，若 μ 是一般的有限 Borel 测度，$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 是 E_n 中的不同点，具有非 0 测度 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$，则可证明等式(i)仍成立(一维的结果可参看 Wiener [1]).

4.8 非负有限 Borel 测度的 Fourier 变换，可以用**正定函数**来刻划. 它们都是定义在 E_n 上的连续函数，对 E_n 上任一点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和任一复数集 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$，具有性质

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i - x_j)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0.$$

Bochner[3] 已证明: 为要 f 是一个非负有限 Borel 测度的 Fourier 变换，必须而且只须 f 是正定的(推广到局部紧 Abel 群上的类似结果见 Rudin [1]).

4.9 如果存在常数 $c_n, \lambda_n, n=1, 2, \cdots m$，使得

$$e^{-\delta} = \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-(\lambda_n \delta)^2},$$

则显然由此可推得，若一积分 Gauss 可求和，那么它必定 Abel 可求和. 定理 1.14 证明中之等式(i)，几乎肯定了这一点. 因此，不容置疑，可以证明: 若 f 有 Abel 与 Gauss 平均 $A_\varepsilon(f)$, $G_\varepsilon(f)$，且 $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(f) = l$，则 $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f)$ 存在且等于 l (参看 Cartwright [1], Bochner and Chandrasekharan [1], Ch.I, § 14).

4.10 在满足(1.23)的每个点 x 处，函数 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p \leqslant \infty$，的 Poisson 积分收敛于 $f(x)$ (证明见 G. Weiss [2]). 后面需用更一般的陈述. 设 $\varphi(x)$ 是一个径向函数(即，$\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$，$\varphi_0(r)$ 非负，对 r 递降，且 $\int_{E_n} \varphi(x)dx = 1$. 那么，对于满足(1.23)的

每一点 x, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 有$(f*\varphi_\varepsilon)(x)\to f(x)$. 特别将它应用于 Gauss-Weierstrass 核时). 根据同样的道理也可证明: 若 ν 是奇异有限 Borel 测度, 则 Poisson-Stieltjes 积分

$$v(x, \varepsilon)=\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(x-t)d\nu(t),$$

几乎对每一 x 趋向于 $0(\varepsilon\to 0$ 时)(这是因为, 对几乎一切 $x\in E_n$, 当 $|S_x|$ 趋于 0 时 ($|S_x|$是以 x 为心的球体体积), $|S_x|^{-1}\int_{S_x}d\nu\to 0$. ——见本书第二章 (5.6) 或 Saks [1], Ch. IV). 若 μ 是任意有限 Borel 测度, 我们可将其分解成奇异部分 μ_1 和绝对连续部分μ_2. 若 f 是 μ_2 的(Radon-Nikodym)导数, 便有:

$$\begin{aligned}u(x, \varepsilon)&=\int_{E_n}P(x-t, \varepsilon)d\mu(t)\\&=\int_{E_n}P(x-t, \varepsilon)\,d\mu_1(t)+\int_{E_n}P(x-t, \varepsilon)f(t)dt\\&=u_1(x, \varepsilon)+u_2(x, \varepsilon).\end{aligned}$$

于是对几乎一切 $x\in E_n$, 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(x, \varepsilon)=0+f(x)=f(x).$$

4.11 对于与平移可交换的算子 B, 下列事实是值得指出的:

(a) 唯有的有意义的情形是 $p\leqslant q$ 的情形, 因为当 $p>q$ 时, B 必将 $\mathscr{S}$ 中之一切元映成 $L^q(E_n)$之零元.

(b) 若 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$, 有 $\|B(\varphi)\|_p\leqslant M\|\varphi\|_p$(即, $B\varphi=u*\varphi$, $B\in(L^p, L^p)$), 则得 $B\in(L^q, L^q)$, 其中

$$\left|\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|,$$

且
$$\|B\varphi\|_q\leqslant M\|\varphi\|_q.$$

为证明(a), 需注意到: 若 $\varphi\in\mathscr{D}$, 又 $f_h(x)=\varphi(x+h)+\varphi(x)$, 则对充分大的 h, 有 $\|f_h\|_p=2^{1/p}\|\varphi\|_p$. 此外, 如果 $F_h=B(f_h)$, 且 $\Phi=B(\varphi)$, 那么, 当 $|h|\to\infty$ 时, 有 $\|F_h\|_q\to 2^{1/q}\|\Phi\|_q$.

为证明(b), 需先用对偶定理(定理 3.20), 再用 Riesz 插值定理(本书第五章, 定理 1.3).

4.12 定理 3.16 讨论的算子是把 L^p 映入 L^q 的、且与平移可交换的有界线性算子. 然而有许多把 $\mathscr{S}$ 映入 $\mathscr{S}$ 的线性算子，它们虽然与平移可交换，但是它们没有把某个 L^p 映入 L^q 的有界线性扩张. 算子 $\varphi\to\partial\varphi/\partial x_k(\varphi\in\mathscr{S})$ 就提供了这样一个例子. 从定理 1.8 看出，这个算子 B 作用在 φ 上，满足 $(B\varphi)^\wedge(x)=2\pi i x_k\hat{\varphi}(x)$. 鉴于定理 3.16, 我们自然会问, 是否存在广义函数 u, 使 $B\varphi=u*\varphi$. 容易验证, 将 φ 映成 $(-\partial\varphi/\partial x_k)(0)$ 的广义函数具有该性质:

$$(u*\varphi)(x)=u(\tau_x\varphi)=(-\partial\tau_x\varphi/\partial x_k)(0)=\partial\varphi/\partial x_k.$$

此外，也容易验证 $\hat{u}$ 是函数 $2\pi i x_k$. 我们还可以得到更一般的结论:

若 $P(D)$ 是微分多项式, 且 $B\varphi=P(D)\varphi$, $(\varphi\in\mathscr{S})$. 那么, 存在 $u\in\mathscr{S}'$, 使得 $B\varphi=u*\varphi$, $\hat{u}(x)=P(2\pi i x)$ 和 $(B\varphi)^\wedge(x)=P(2\pi i x)\hat{\varphi}(x)=\hat{u}(x)\hat{\varphi}(x)$.

4.13 对任一 $p>2$, 存在一个 $f\in L^p$, 其 Fourier 变换(作为广义函数)不是一个函数. 如若不然, 用闭图象定理容易证明, 对一切 $f\in L^p$, $p>2$, 必有不等式 $\int_{|x|<1}|\hat{f}(x)|\,dx\leqslant A\|f\|_p$ 成立. 这将导致矛盾: 当 $n=1$ 时, 由定理 1.13, 并利用解析延拓, 得到 $\hat{f}(x)=e^{-\pi(1+i\delta)x^2}$, $f(x)=e^{-\pi x^2/(1+i\delta)}/(1+i\delta)^{1/2}$. 但此时有

$$\int_{|x|<1}|\hat{f}(x)|\,dx=A_1,$$

且有 $\|f\|_p\leqslant A_2\delta^{1/p-1/2}$. 而在 $\delta\to\infty$ 时，上述不等式对 $p>2$ 显然是不可能的. 对任意 n 的情况, 可以类似地证明.

4.14 作为进一步的参考, 我们谈谈把积分化成极坐标形式, 以及它与旋转群 $SO(n)$ 上积分的关系.

(a) 设 f 是 E_n 上的可积函数, 则

$$\int_{E_n}f(x)\,dx=\int_{\Sigma_{n-1}}dx'\left(\int_0^\infty f(rx')r^{n-1}dr\right),$$

这里 x' 取遍 Σ_{n-1}, dx' 是 Σ_{n-1} 上的诱导 Lebesgue 测度.

(b) 设 φ 在 Σ_{n-1} 上可积, 则

$$(1/\omega_{n-1})\int_{\Sigma_{n-1}}\varphi(x')\,dx'=\int_{SO(n)}\varphi(\sigma\mathbf{1})\,d\sigma,$$

这里，$d\sigma$ 是 $SO(n)$ 上的由条件 $\int_{SO(n)}d\sigma=1, \mathbf{1}=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 规范化了的 Haar 测度. 为证明 (b)，我们注意到 dx' 在旋转 $\sigma\in SO(n)$ 下是不变量，所以，

$$\begin{aligned}(1/\omega_{n-1})\int_{\Sigma_{n-1}}\varphi(x')\,dx' &= (1/\omega_{n-1})\int_{SO(n)}\int_{\Sigma_{n-1}}\varphi(\sigma x')\,dx'\,d\sigma\\ &=(1/\omega_{n-1})\int_{\Sigma_{n-1}}\int_{SO(n)}\varphi(\sigma\sigma_0\mathbf{1})\,d\sigma\,dx'\\ &=(1/\omega_{n-1})\int_{\Sigma_{n-1}}\int_{SO(n)}\varphi(\sigma\mathbf{1})\,d\sigma\,dx'\\ &=\int_{SO(n)}\varphi(\sigma\mathbf{1})\,d\sigma.\end{aligned}$$

其中，σ_0 是把 $\mathbf{1}$ 映成 x' 的任意一个旋转变换. 倒数第二个等式可由 Haar 测度 $d\sigma$ 的右不变性来证明. 关于 Haar 测度的基本性质，不妨参看 Weil[1].

4.15 作为定理 3.11 的直接推论，可以证明：若 u 为缓变广义函数，那么，对适当的整数 m 和每个 n 元数组 $\alpha(|\alpha|\leqslant m)$，存在常数 a_α 和缓增连续函数 f_α，使得

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha(L_{f\alpha}).$$

它的逆问题是第 3 节内容的推论，故这种表示式刻划了缓变广义函数类的特征。

文 献 注 释

古典调和分析方面的重要专著有 Bochner [3], Wiener [1], Zygmund [1], Titchmarsh [2], Bochner and Chandrasekharan [1], Bari [1]. 介绍性的著作有 R. Goldberg [1], G. Weiss [3]. 第一章内用到的许多初等分析，特别是极坐标部分，可在 Fleming[1] 中看到；这方面还可参看 Blumenson[1]. 第 1 节的前部和第 2 节中的许多内容的一般背景，就是局部紧 Abel 群的理论，这方面可参看 Weil [1], Rudin [1], Hewitt and Ross [1]. 我们不打算讨论由 Wiener 的 Tauber 定理引出的一些重要课题，它将导致

对 L^1 代数的更广泛的研究．关于这类课题在一般局部紧 Abel 群题材范围内的论述，读者可参考 Naimark [1]，或 Rudin [1]．本书中定理 1.14 的证明，取自 Bochner and Chandrasekharan [1]．估计等式的技巧（特别是定理 1.18 和 1.25 的变形）已有很长的历史，我们不准备多加叙述．定理 1.25 中出现的公式是根据 R. Latzer 的建议写入的．类似的结果可在 Calderón and Zygmund [3] Ch. II 中看到．本章中用到的泛函分析结果，特别是在证明定理 3.19 时用到的单位球的弱*紧性，可参考 Royden[1]．

至于广义函数的一般理论和应用，可参看 L. Schwartz [1], Gelfand and Shilov [1], Ehrenpreis [1]．在这些书里，读者会找到被本书省略了的证明和关于广义函数方面的古典文献．若为尽快地了解有关 Fourier 变换的理论，可参看 Hörmander [2], Ch. I 和 Yosida [1] Ch. VI．我们在定理 3.16, 3.18, 3.19, 3.20 中处理了 (L^p, L^q) 型的算子，它们有时有着各种不同的形式．不妨参看 Bochner [9], Hille and Phillips [1], Bochner and Chandrasekharan [1], Zygmund [1], Ch. IV, Hörmander [1]．这些书中还介绍了一些其它参考材料．

第二章 调和函数的边界值

研究 E_n 上函数 f 的一个基本工具，是定义在 $(n+1)$ 维上半空间上，且以 f 为其边界值的调和函数. 因此在第 1 节，我们介绍一些有用的关于多变量调和函数的基本事实. 在第 2 节，研究 E_n 上的函数 f 与 $(n+1)$ 个变量的调和函数（f 的 Poisson 积分）之间的联系. 第 3、4 节讨论（调和函数）在边界上的非切向收敛与调和控制. 这些概念不但对调和函数本身是有用的，同时也给第三、六章提供了重要的工具.

§1 调和函数的基本性质

我们假定读者对通常复变课程中所介绍的调和函数的性质是熟悉的，其中的许多结果可推广到多维情形，然而我们不能再靠解析函数的理论（如同处理二维情形那样）来建立多维的性质. 因此，本节要对 n 个变量调和函数的基本理论作一些介绍.

定义在区域（E_n 的开连通子集）上的函数 u，如果它二次可微（即，二阶偏导数存在且连续），且在区域的每一点上满足 Laplace 方程 $\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\partial^2u/\partial x_k^2=0$，那么称函数 u 为调和函数. 在下面列举的调和函数的例子中，由前两个容易推出：第一章第 1 节中所介绍的 Abel 平均和 Poisson 积分是调和函数.

(1) 对固定的 $t\in E_n$，$e^{-2\pi|t|y}e^{2\pi ix\cdot t}=u(x, y)=u(x_1,\cdots,x_n,y)$ 是 E_{n+1} 中的调和函数.

(2) $E_{n+1}^+=\{(x, y)=(x_1, \cdots, x_n, y)\in E_{n+1};\ y>0\}$（通常称为上半空间[1]），在 E_{n+1}^+ 上，$P(x, y)=c_n[y/(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}]$ 也

1) 为了强调 E_{n+1}^+ 是上半平面（$n=1$ 的情形）的推广，所以用有序数对 (x, y) 来表示 E_{n+1}^+ 中的点，其中 $x\in E_n$，y 是正实数.

是调和函数.

(3) 在任何不含原点的区域中，当 $n\geqslant 3$ 时，$u(x)=|x|^{2-n}$ 是调和函数. 在二维情形，相应的例子是 $u(x)=\log|x|$. 在后文我们将会明白，在某种意义下，这些函数"生成"了所有的调和函数.

(4) 我们将在后文中证明(定理 1.7)，调和函数是无穷次可微的，实际上是实解析的(见第四章(5.5)). 显然，调和函数的偏导数也是调和的. 作为例子，我们知道：当 $n>1$ 时，$P(x, y)$ 是 $[c_n/(1-n)][1/(|x|^2+y^2)^{(n-1)/2}]$ 关于 y 的偏导数；当 $n=1$ 时，$P(x, y)$ 是 $c_n\log(|x|^2+y^2)^{1/2}$ 关于 y 的偏导数.

(5) 若 u 在区域 $\mathscr{D}$ 中调和，则 $\tau_h u$ 在 $\mathscr{D}+h=\{x+h; x\in\mathscr{D}\}$ 中调和. 就是说，平移变换保持调和性. 同样，旋转和伸缩变换也保持调和性(这一事实可以由直接计算得到，但在用平均值性质建立调和函数的特征以后，这一点将看得更明显——见下文定理 1.1).

(6) $\sin\sqrt{n}y\prod_{k=1}^{n}\cosh x_k=u(x, y)$ 在 $E_{n+1}=\{(x, y); x\in E_n, y\in E_1\}$ 上调和.

我们用记号 $\mathscr{M}(r)=\mathscr{M}_{x,u}(r)$ (说明它依赖于 x, u 及 r) 表示函数 u 在球面(以 x 为心，$r>0$ 为半径)上的平均值. 即，令 Σ 表示 E_n 中的单位球面，dt' 是 Σ 上的面积元(这就是第一章引理 1.17 的证明中所用的符号)，那么，

$$\mathscr{M}_{x,u}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma}u(x+rt')\,dt'.$$

定理 1.1(调和函数的平均值定理) 设 u 在区域 $\mathscr{D}$ 中调和，若以 $x\in\mathscr{D}$ 为心、以 r_0 为半径的球含于 $\mathscr{D}$ 中，则对 $0<r\leqslant r_0$，有

$$u(x)=\mathscr{M}_{x,u}(r).$$

证明 根据(5)，我们可假定 $x=0$. 令 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{D}$ 的子域，其边界 $\partial\mathscr{E}\subset\mathscr{D}$ 充分光滑. 那么，在 $\mathscr{E}$ 上对函数 u 和 1 应用 Green 定理，就得到，

$$\int_{\partial\mathscr{E}}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0, \tag{1.2}$$

此处，$\partial/\partial n$ 是在 $\partial\mathscr{E}$ 的外法线方向上的微分. ds 是 $\partial\mathscr{E}$ 上的曲面面积元.

设 Σ_ε 和 Σ_r $(0<\varepsilon<r\leqslant r_0)$ 是以 0 为心并分别以 ε 和 r 为半径的球面. 在这二个球面所夹的球壳内，对函数 u 和函数

$$v(x)=\begin{cases}|x|^{-(n-2)}, & \text{当 } n>2;\\ \log|x|, & \text{当 } n=2\end{cases}$$

应用 Green 定理，我们得到[2]，

$$0=\left(\int_{\Sigma_r}-\int_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-(n-2)|x|^{-(n-1)}u)\,ds$$
$$-\left\{\int_{\Sigma_r} v\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_{\Sigma_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial n}ds\right\}.$$

但 v 在 Σ_r 和 Σ_ε 上分别为常数(分别等于 $r^{-(n-2)}$ 和 $\varepsilon^{-(n-2)}$). 因 u 在 $\mathscr{D}\supset\{x\in E_n;\ |x|\leqslant r_0\}$ 上调和，对 $\partial\mathscr{E}=\Sigma_r$ 和 $\partial\mathscr{E}=\Sigma_\varepsilon$ 应用 (1.2)，则上式花括号中的项必为 0. 于是，

$$\varepsilon^{1-n}\int_{\Sigma_\varepsilon} u\,ds=r^{1-n}\int_{\Sigma_r} u\,ds.$$

因此，

$$\mathscr{M}_{0,u}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma u(rt')\,dt'$$
$$=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Sigma_r} u\,ds$$
$$=\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Sigma_\varepsilon} u\,ds.$$

但最后的表达式当 $\varepsilon\to 0$ 时显然趋向于 $u(0)$，定理得证. ❙

推论 1.3(调和函数的最大值原理) 设 u 为区域 $\mathscr{D}$ 上的实值调和函数，具有性质 $A=\sup\limits_{x\in\mathscr{D}}u(x)<\infty$. 若 u 不是常数函数，则对一切 $x\in\mathscr{D}$，有 $u(x)<A$.

证明 设对某 $x\in\mathscr{D}$，有 $u(x)=A$. 则由定理 1.1，存在 $r_0>0$，使得当 $0<r\leqslant r_0$ 时，$A=u(x)=\mathscr{M}_{x,u}(r)$. 但由于 u 连续，且满

2) 我们对 $n>2$ 的情形，给出定理的证明. 在 $n=2$ 时，做一些明显的修改，也可得出结果. 当 $n=1$ 时，由于调和函数在此情况是线性函数，则定理显然成立.

足 $u\leqslant A$，故必定在 $\Sigma_r(x)=\{y\in E_n;\ |y-x|=r\}$ 上有 $u\equiv A$. 就是说，对一切 $t=x+h$, $|h|<r_0$, 有 $u(t)=A$. 这说明，集 $\{t\in E_n; u(t)=A\}$ 是开集. 另一方面，由 u 的连续性推知，该集也是闭集(关于 $\mathscr{D}$). 又因 $\mathscr{D}$ 是连通的，所以该集必与 $\mathscr{D}$ 重合. 这说明 u 是常数函数 $u(x)\equiv A$.】

对 $-u$ 应用此结果，就得到调和函数的最小值原理：在推论 1.3 的假定下，若 $B=\inf\limits_{x\in\mathscr{D}} u(x)>-\infty$，且 u 不是常数函数，则对一切 $x\in\mathscr{D}$，有 $u(x)>B$.

下述推论是最大(小)值原理的等价形式：

推论 1.3′ 设 u 在有界区域 $\mathscr{D}$ 的闭包 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，并在 $\mathscr{D}$ 内调和. 若 u 不是常数函数，则 u 的最大(小)值只能在 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}=\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$ 上达到.

将这一事实应用到 u_1-u_2 上，就得到：

推论 1.4 若 u_1, u_2 在有界区域 $\mathscr{D}$ 的闭包 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，在 $\mathscr{D}$ 内调和，并在边界 $\partial\mathscr{D}=\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$ 上相等. 则对一切 $x\in\overline{\mathscr{D}}$，有 $u_1(x)=u_2(x)$.

平均值性质的另一结果是下述 Liouville 定理：

定理 1.5 若 v 在 E_n 上调和并有界，则 v 是常数函数.

证明 令 $\Omega_n=\omega_{n-1}/n$ 是 E_n 上单位球体的体积. 于是对一切 $x\in E_n$, $t>0$，根据平均值性质定理 1.1，我们得到：

$$
\begin{aligned}
v(x)&=v(x)\frac{n}{t^n}\int_0^t \rho^{n-1}\,d\rho=\frac{n}{t^n}\int_0^t \mathscr{M}_{x,v}(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\\
&=\frac{n}{\omega_{n-1}}\ \frac{1}{t^n}\int_0^t\left\{\int_\Sigma v(x+\rho y')\,dy'\right\}\rho^{n-1}\,d\rho\\
&=\frac{1}{t^n\Omega_n}\int_{|y|<t} v(x+y)\,dy.
\end{aligned}
$$

若用 $S_t(x)$ 表示以 x 为心，t 为半径的球体，那么，

$$
\begin{aligned}
|v(x_1)-v(x_2)|&=\frac{1}{t^n\Omega_n}\left|\int_{S_t(x_1)} v(x)\,dx-\int_{S_t(x_2)} v(x)\,dx\right|\\
&\leqslant\frac{1}{t^n\Omega_n}\left|\int_{S_t(x_1)-S_t(x_2)} dx+\int_{S_t(x_2)-S_t(x_1)} dx\right|\|v\|_\infty.
\end{aligned}
$$

然而,当 $t\to\infty$ 时,对称差 $(S_t(x_1)-S_t(x_2))\cup(S_t(x_2)-S_t(x_1))$ 的测度除以 t^n 后,显然趋向于 0. 因而 $v(x_1)-v(x_2)=0$. 于是 $v(x)$ 必为常数函数. 】

平均值性质完全刻划了调和函数的特征. 为了说明这一点,首先建立以下引理:

引理 1.6 设函数 u 在区域 $\mathscr{D}$ 内二次可微, 且当球 $\{t\in E_n;|t-x|\leqslant r\}$ 属于 $\mathscr{D}$ 时,有 $\mathscr{M}_{x,u}(r)=u(x)$,则 u 在 $\mathscr{D}$ 内调和.

证明 固定 $x\in\mathscr{D}$, 设 $\mathscr{M}''(0)\ (=\mathscr{M}''_{x,u}(0))$ 是二阶导数 $(d^2/dr^2)\mathscr{M}(r)$ 在 $r\to0$ 时的极限(由二阶导数的连续性知此极限是存在的). 则引理是等式

$$\mathscr{M}''(0)=\frac{1}{n}(\Delta u)(x)$$

的直接结果.

令 $t'=(t'_1,t'_2,\cdots,t'_n)\in\Sigma$,我们有

$$\frac{d^2}{dr^2}\mathscr{M}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma\Big(\sum_{j,k=1}^n u_{jk}(x+rt')\,t'_jt'_k\Big)dt',$$

因此,

$$\mathscr{M}''(0)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{j,k=1}^n\int_\Sigma u_{jk}(x)t'_j\,t'_k\,dt'$$
$$=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{j,k=1}^n\Big(\int_\Sigma t'_j\,t'_k\,dt'\Big)u_{jk}(x).$$

但由对称性易知,当 $j\neq k$ 时,$\int_\Sigma t'_j\,t'_k\,dt'=0$,而对 $1\leqslant j\leqslant n$,$\int_\Sigma(t'_j)^2dt'=\omega_{n-1}/n$ 的值与 j 无关. 于是便得到 $\mathscr{M}''(0)=(1/n)\sum\limits_{j=1}^n u_{jj}(x)$. 因而引理得证. 】

下面的结果表明, 即使将引理 1.6 中 u 的二阶可微性的假定减弱为仅是局部可积,引理 1.6 仍成立. 此外,由下面的定理连同定理 1.1 还可以推出,区域 $\mathscr{D}$ 上的调和函数必属于 $C^\infty(\mathscr{D})$ 类.我们首先考虑 u 为连续的情形.

定理 1.7 设区域 $\mathscr{D}\subset E_n$ 上的连续函数 u 满足平均值性质(如引理 1.6 所述),则 u 在 $\mathscr{D}$ 中调和,并有各阶连续偏导数.

证明 由于这个问题是局部的,可以仅在一个闭包属于 $\mathscr{D}$ 的球上来考察 u,因此可假设 $\mathscr{D}$ 是一个球,且 u 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上可积. 定义 u 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 外之值为0,就可把 u 扩张到整个 E_n 上. 选一个径向函数 $\varphi\in C^\infty(E_n)$,满足 $\int_{E_n}\varphi(x)\,dx=1$,且其支集包含在半径为1的球体内. 再对 $\varepsilon>0$,令 $u_\varepsilon=u*\varphi_\varepsilon$,其中 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. 显然 $u_\varepsilon\in C^\infty(E_n)$. 采用极坐标,我们有

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x)&=\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(t)u(x-t)\,dt\\&=\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)\left\{\int_\Sigma u(x-rt')\,dt'\right\}r^{n-1}\,dr\\&=\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)\omega_{n-1}\cdot\mathscr{M}_{x,u}(r)r^{n-1}\,dr.\end{aligned}$$

若 ε 小于自 x 到 $\mathscr{D}$ 之边界的距离,则对 $0\leqslant r\leqslant\varepsilon$,$\mathscr{M}_{x,u}(r)=u(x)$. 那么,

$$u_\varepsilon(x)=u(x)\omega_{n-1}\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)r^{n-1}\,dr=u(x).\ ^{3)}$$

特别地,若 x_0 和 $2d$ 分别是 $\mathscr{D}$ 的中心和半径,则对一切与 x_0 之间的距离小于 d 的 x,有 $u(x)=u_d(x)$. 这说明,在每个 $x_0\in\mathscr{D}$ 的一个邻域中,u 与一个 C^∞ 函数等同. 再由引理1.6推出它的调和性,从而定理得证. 】

假如 u 只是局部可积,那么就必须假定平均值性质取如下形式:

$$u(x)=\frac{1}{t^n\Omega_n}\int_{|y|<t}u(x+y)\,dy.$$

其中 t 充分小,以使以 x 为心、t 为半径的球位于 $\mathscr{D}$ 内. 同上推理也能证明 $u(x)=u_d(x)$,所以 u 仍能满足定理1.7的结论.

推论 1.8 设 $\{u_n\}$ 是定义在区域 $\mathscr{D}$ 上的调和函数序列. 若在 $\mathscr{D}$ 的每个紧子集上,$\{u_n\}$ 一致收敛于函数 u,则 u 也是调和函

3) 在第一章中我们已经知道(见定理1.18和1.25),这些卷积 $u_\varepsilon=u*\varphi_\varepsilon$ 是如何逼近 u 的. 再加上 u 具有平均值性质,则当 ε 足够小时,就有 $u_\varepsilon(x)=u(x)$. 一般说来,若 φ 是光滑的,则 $u_\varepsilon=u*\varphi_\varepsilon$ 也是光滑的,此时,这样的一族 $\{u_\varepsilon\}$ 常称为 u 的正则化.

数.

证明 由于 u 连续,则由定理 1.7 可知,只需证明 u 具有平均值性质即可. 根据定理 1.1,对一切 $x\in\mathscr{D}$ 以及使 $\{t;\ |x-t|\leqslant r\}\subset\mathscr{D}$ 的 r,有 $\mathscr{M}_{x,u_n}(r)=u_n(x)$. 又因 u_n 在球面 $\{t;\ |x-t|=r\}$ 上一致收敛于 u, 则用以定义 $\mathscr{M}_{x,u_n}(r)$ 的积分必收敛于用来定义 $\mathscr{M}_{x,u}(r)$ 的积分. 因此, $\mathscr{M}_{x,u}(r)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{M}_{x,u_n}(r)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=u(x)$. 此即欲证之结果.]

有关调和函数的一个古典问题是著名的 Dirichlet 问题. 它的最一般的提法是:

设 $\mathscr{D}$ 是一个有紧闭包 $\overline{\mathscr{D}}$ 的区域, f 是定义在其边界 $\partial\mathscr{D}=\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$ 上的连续函数. 问是否存在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的一个连续函数,使得:

(i) u 在 $\mathscr{D}$ 上调和,

(ii) 当 $x\in\partial\mathscr{D}$ 时, $u(x)=f(x)$.

推论 1.4 告诉我们,若这样的函数 u 存在,便是唯一的.

我们的主要兴趣在于 Dirichlet 问题的变式, 即其中 $\mathscr{D}$ 是上半空间 E_{n+1}^{+} 的情形(见 § 2). 然而, 当 $\mathscr{D}$ 是开球时,这里所说的 Dirichlet 问题的解是很重要的, 而且有很多的应用. 在这种特殊情形下, 我们利用单位球上的 Poisson 核 $p(s,\ x)$ 以得到问题的解. 这里

$$p(s,\ x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\ \frac{1-|x|^2}{|x-s|^n}=\frac{1}{\omega_{n-1}}\ \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{n/2}},$$

其中, $r=|x|<1=|s|$, γ 是向量 x 与 s 间的夹角, 即 $r\cos\gamma=x\cdot s$.

核 $p(s,\ x)$ 有下列三个基本性质:

定理 1.9 设 $\Sigma=\Sigma_{n-1}=\{s\in E_n;\ \ |s|=1\}$ 表示 E_n 中的单位球面, ds 表示曲面面积元. 那么,

(a) 对一切 $s\in\Sigma$ 和 $|x|<1$, 有 $p(s,\ x)\geqslant 0$;

(b) 当 $|x|<1$ 时, $\int_{\Sigma}p(s,\ x)\,ds=1$;

(c) 对于 $x'\in\Sigma$, 令 $x=rx'(0\leqslant r<1)$, 那么对每个 $\delta>0$, 当 $r\to 1$ 时,

$$\int_{s\in\Sigma,\ |s-x'|>\delta} p(s,\ rx')\,ds\to 0$$

对 x' 一致成立.

证明 性质 (a) 显然成立. 此外，只要注意到当 $s\in\Sigma$ 且满足 $|s-x'|>\delta$ 时，$|s-x|=|s-rx'|$ 在 0 点邻域外有界(对 x' 一致)，则 (c) 也显然成立.

为了证明 (b)，我们首先注意到，对每一 $s\in\Sigma$，$p(s,\ x)$ 在 $|x|<1$ 中是 x 的调和函数. 于是，依平均值性质(定理 1.1)，对 $0\leqslant r<1$ 以及 $s,\ x'\in\Sigma$，有

$$1=\omega_{n-1}p(s,\ 0)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma \omega_{n-1}p(s,\ rx')\,dx'$$

$$=\int_\Sigma p(s,\ rx')\,dx'.$$

但 $|rx'-s|=|rs-x'|$，从而有 $p(s,\ rx')=p(x',\ rs)$. 于是，交换 s 与 x' 的位置，就得出 (b). 】

我们现在可以利用这些性质，来解决单位球内的 Dirichlet 问题.

定理 1.10 设函数 f 在 Σ 上连续，则函数

$$u(x)=\begin{cases}\int_\Sigma f(s)p(s,\ x)\,ds, & |x|<1;\\ f(x), & |x|=1\end{cases}$$

在 $|x|<1$ 中调和，在 $|x|\leqslant 1$ 上连续.

证明 u 对 $|x|<1$ 是调和的这一点是由下述事实得出的，即：对 u 作用 Laplace 算子等于对 $p(s,\ x)$ 作用 Laplace 算子(关于 x)再乘以 f 后的积分. 这就需要证明微分和积分可以交换次序. 较简单的证法是：注意到依 Fubini 定理立即可知，u 在以 x 为心、$r<1-|x|$ 为半径之球面上的平均值等于 $p(s,\ \cdot)$ 在同一球面上的平均值乘以 $f(s)$ 后的积分. 由于 $p(s,\ \cdot)$ 是调和的，所以 $p(s,\ \cdot)$ 在该球面上的平均值等于 $p(s,\ x)$. 于是，u 满足平均值性质，因而依定理 1.7，它必在单位球内调和.

为证明 u 在闭单位球上连续，只需证明它在边界 Σ 上连续.

设 $x'\in\Sigma$, $0\leqslant r<1$, $x=rx'$, 且 $A_\delta=\{s\in\Sigma;\ |s-x'|>\delta\}$. 那么, 按照定理 1.9 之(b)与(a), 我们有

$$|u(x)-u(x')|=\left|\int_\Sigma [f(s)-f(x')]p(s,\ rx')\,ds\right|$$
$$\leqslant\int_{A_\delta}|f(s)-f(x')|p(s,\ rx')\,ds$$
$$+\int_{\Sigma-A_\delta}|f(s)-f(x')|p(s,\ rx')\,ds.$$

再利用定理 1.9 之(b), 可知不等式右端第二项不超过

$$\{\sup_{|s-x'|<\delta}|f(s)-f(x')|\}\int_{\Sigma-A_\delta}p(s,x)\,ds$$
$$\leqslant\{\sup_{|s-x'|<\delta}|f(s)-f(x')|\}\cdot 1.$$

而当 δ 选得接近于 0 时, 上式右端可以很小, 比如说小于 $\varepsilon>0$. 另一方面, 对于固定的 δ, 前一不等式右端第一项不超过

$$2\{\sup_{t\in\Sigma}|f(t)|\}\int_{A_\delta}p(s,\ x)\,ds.$$

但由定理 1.9 之(c)知, 当 $r\to 1$ 时, $\int_{A_\delta}p(s,\ x)\,ds$ 对 x' 一致趋向 0. 于是便知, 当 r 充分接近于 1 时, $|u(x)-u(x')|<\varepsilon$ 对 x' 一致成立.

因此, 若 $x_0\in\Sigma$, $x=rx'$, 则当 x 充分接近于 x_0 时(此时可推出 $1-r$ 和 $|x'-x|$ 同时充分小), 有 $|u(x_0)-u(x)|\leqslant|u(x_0)-u(x')|+|u(x')-u(x)|=|f(x_0)-f(x')|+|u(x')-u(x)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$. 定理获证. 】

应用适当的平移和伸缩变换, 上述结果就给出在 E_n 中的一般球上的 Dirichlet 问题的解:

推论 1.11 设 $\mathscr{D}$ 是以 x_0 为心、以 a 为半径的球之内部, f 在 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 上连续. 则函数

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_{n-1}a^{2-n}}\displaystyle\int_\Sigma f(x_0+as)\,\dfrac{a^2-|x-x_0|^2}{|(x-x_0)-as|^n}\,ds, & |x-x_0|<a;\\ f(x), & |x-x_0|=a\end{cases}$$

在 $\mathscr{D}$ 内调和且在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续.

我们给出这一结果的两个应用．其一是下述关于一致有界的调和函数序列的基本定理：

定理 1.12 设 $\{u_m\}$ 是定义在区域 $\mathscr{D}\subset E_n$ 上的调和函数序列，u_m 在有界子域 $\mathscr{S}$ 的闭包上一致有界，且 $\overline{\mathscr{S}}\subset\mathscr{D}$．则存在一个子序列 $\{u_{m_k}\}$ 一致收敛于一个定义在 $\mathscr{S}$ 上的调和函数．

证明 若能证明 u_m 在 $\overline{\varphi}$ 上等度连续，则本定理就是 Ascoli 定理和推论 1.8 的推论．为了证明 u_m 的等度连续性，只需证明，在 $\mathscr{S}$ 的每一闭子集上 u_m 的一阶导数一致有界．但若 $x_0\in\mathscr{S}$，则只要 a 足够小，而使以 x_0 为心、以 a 为半径的球位于 $\mathscr{S}$ 内，对 $|x-x_0|<a$, $u_m(x)$ 就有推论 1.11 中的积分表达式，将它对 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 求导，并计算此偏导数在 x_0 处的值，我们就得到

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x_0)=\frac{n}{\omega_{n-1}a}\int_\Sigma u_m(x_0+as)s_i\,ds.$$

于是 $|(\partial u_m/\partial x_i)(x_0)|\leqslant(n/a)\sup\limits_{y\in\mathscr{S}}|u_m(y)|$，由此便得出 u_m 的一阶偏导数在 $\mathscr{S}$ 的每一闭子集上的一致有界性．】

推论 1.11 的第二个应用是下述调和函数的反射原理：

定理 1.13 设 $\mathscr{D}\subset E_{n+1}$ 是关于 E_n 的对称区域（即，如果 $(x, y)=(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\in\mathscr{D}$，则 $(x, -y)\in\mathscr{D}$）．若 $\mathscr{D}$ 上的连续函数 u 满足 $u(x, y)=-u(x, -y)$，且在 $\mathscr{D}$ 的"上半部"$\mathscr{D}^+=\{(x, y)\in\mathscr{D}, y>0\}$上调和，则 u 在整个 $\mathscr{D}$ 上调和．

证明 依题设，u 在 $\mathscr{D}^+$ 上调和．因为 $-(\Delta u)(x, -y)=(\Delta u)\cdot(x, y)$，所以它也在 $\mathscr{D}^-=\{(x, y)\in\mathscr{D}; y<0\}$ 上调和．因此，只需证明在 $\mathscr{D}\cap E_n=\{(x, y)\in\mathscr{D};\ y=0\}$ 的每一点的一个邻域上 u 调和即可．现设 $x_0=(x_0, 0)$ 就是这样一点，则可找到一个以此点为心，以 $a>0$ 为半径的闭球（体）$S_a(x_0)$，使它包含在 $\mathscr{D}$ 中．对于 $S_a(x_0)$ 中的 (x, y)，设

$$(1.14)\qquad w(x, y)=\frac{a^{n-1}}{\omega_n}\times\int_{\Sigma_n}u(x_0+as,\ at)\frac{a^2-|(x-x_0,\ y)|^2}{|(x-x_0-as,\ y-at)|^{n+1}}\,d\sigma,$$

其中 $\sigma=(s,\ t)=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ t)$ 是 Σ_n(E_{n+1} 的单位球面)上的点. 由推论 1.11 知, w 是调和函数, 且在 $S_a(x_0)$ 的边界上与 u 等同. 另一方面, 由于 $u(x_0+as,\ at)=-u(x_0+as,\ -at)$, 以及

$$\frac{a^2-|(x-x_0,\ 0)|^2}{|(x-x_0-as,\ -at)|^{n+1}}=\frac{a^2-|(x-x_0,\ 0)|^2}{|(x-x_0-as,\ at)|^{n+1}},$$

积分(1.14)在 $y=0$ 时为 0, 而由 u 的连续性, 当 $(x_0,\ 0)\in\mathscr{D}$ 时, 有 $u(x_0,\ 0)=0$. 于是, 在 $S_a(x_0)$ 的上半边界做成的上半球面 $\{(x,\ y)\in\overline{E}^+_{n+1};\ |x-x_0|^2+y^2=a^2\}$ 上和在 $S_a(x_0)\cap E_n$ 上, w 与连续函数 u 等同. 又由于 w 和 u 在此半球的内部都是调和的, 所以依推论 1.4, 它们在上半球内部必定等同. 再对下半球进行同样的论证, 就得到在 $S_a(x_0)$ 上 $u\equiv w$. 因 w 在 $S_a(x_0)$ 内调和, 所以 u 也在 $S_a(x_0)$ 内调和. 定理得证. 】

下述推论是反射原理和 Liouville 定理(定理 1.5) 的直接结果, 它在下一节是有用的.

推论 1.15 设函数 u 在 $\overline{E^+_{n+1}}=E^+_{n+1}\cup E_n=\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ y\geqslant 0\}$ 上连续, 在 E^+_{n+1} 内调和, 且在 E_n 上为 0. 那么, 若 u 在 E^+_{n+1} 内有界, 则 u 必恒等于 0.

注意, 除非对 u 附加限制条件, 诸如有界性等, 否则这一结论是不成立的. 例如, 函数 $u(x,\ y)=y$ 就满足推论 1.15 中除有界性以外的全部条件, 但 u 不恒等于 0. 这个例子还说明, 无界区域 $E^+_{n+1}=\mathscr{D}$ 上的 Dirichlet 问题, 其解不唯一(因 $u(x,y)=y$, $v(x,y)=0$ 都在 $\mathscr{D}$ 中调和, 且在 E_n 上有边界值 $f\equiv 0$). 相反, 推论 1.15 告诉我们, 如果对 u 再加上有界性条件, 则解就是唯一的. 下一节, 我们详细研究与区域 E^+_{n+1} 相关的一些 Dirichlet 问题的变式.

§2 Poisson 积分的特征

我们已经做了必要的准备, 现在开始讨论与 E_n 上 Fourier 分析相关联的调和函数理论的有关部分.

我们提出以下问题: 给定函数 $f\in L^p(E_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, 是否存

在一个定义在上半空间 E^+_{n+1} 的调和函数 u，使得当 $y\to 0$ 时，有

$$\|u(\cdot,\ y)-f\|_p=\left(\int_{E_n}|u(x,\ y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\to 0?$$

假如 f 连续而 $p=\infty$，这个问题就是 Dirichlet 问题在无界区域 $\mathscr{D}=E^+_{n+1}$ 上的直接推广．刚才我们已经看到，这时问题的解不一定唯一．而且，若 f 不连续，那么显然也不能存在调和(尤其还是连续)函数 u，使当 $y\to 0$ 时，有 $\|u(\cdot,\ y)-f\|_\infty\to 0$．然而，当 $p<\infty$ 时，问题的解是存在的．且对 $p=\infty$ 时，如果问题提得适当，问题的解也是存在的．

下述事实(在很大程度上，是已确立的所有结果)告诉我们，f 的 Poisson 积分正是我们所要找的调和函数．

定理 2.1 (a) 设 $f\in L^p(E_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，$f$ 的 Poisson 积分是

$$u(x,y)=\int_{E_n}f(t)P(x-t,\ y)dt,$$

则 u 在 E^+_{n+1} 上调和，且对几乎每一个 $x\in E_n$，有 $\lim\limits_{y\to 0}u(x,\ y)=f(x)$，且对一切 $y>0$，有

$$\|u(\cdot,\ y)\|_p=\left(\int_{E_n}|u(x,\ y)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_p. \tag{2.2}$$

如果 $1\leqslant p<\infty$，那么 $u(\cdot,\ y)$ 按 L^p 范数收敛于 $f(y\to 0)$，即

$$\|u(\cdot,\ y)-f\|_p=\left(\int_{E_n}|u(x,\ y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\to 0(y\to 0).$$

(b) 若 $f\in C_0\subset L^\infty(E_n)$，则 f 的 Poisson 积分 $u(x,\ y)$ 一致收敛于 f，即当 $y\to 0$ 时，$\|u(\cdot,\ y)-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in E_n}|u(x,\ y)-f(x)|\to 0$．如果仅假定 f 连续并有界，则一致收敛性在 E_n 的紧子集上成立．对这两种情形，我们令 $u(x,\ 0)=f(x)$，可将 $u(x,\ y)$ 扩张到 $\overline{E^+_{n+1}}=E^+_{n+1}\cup E_n$上，因而得到一个连续函数．

证明 (a) 中的几乎处处收敛性和依范收敛性就是第一章定理 1.25 和 1.18．不等式(2.2)是第一章定理 1.3 的直接推论，只需取 $g(x)=P(x,y)$，$h(x)=u(x,y)$ (回想一下，引理 1.17 曾断言 $g=P(\cdot,\ y)\in L^1(E_n)$，$\|g\|_1=1$)．$u$ 的调和性可利用 Poisson 核

的调和性以及与定理 1.10 证明的前部完全类似的方法来证明.

由于第一章条件 (1.24) 显然处处成立，所以，如果 f 连续、有界，则对一切 $x\in E_n$，当 $y\to 0$ 时，必有 $u(x, y)$ 收敛于 $f(x)$ (见第一章定理 1.25). 它在 E_n 的紧子集 F 上的一致收敛性只需如下简单地论证：给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in F$，$|t|<\delta$，有 $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$. 于是，

$$\begin{aligned}|u(x, y)-f(x)| &= \left|\int_{E_n} f(x-t)P(t, y)\,dt-f(x)\right| \\ &= \left|\int_{E_n} f(x-t)P(t, y)\,dt \right. \\ &\quad \left. -\int_{E_n} f(x)P(t, y)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{|t|<\delta} |f(x-t)-f(x)|\,P(t, y)\,dt \\ &\quad +\int_{|t|>\delta}|f(x-t)-f(x)|\,P(t, y)\,dt \\ &\leqslant \varepsilon\int_{E_n} P(t, y)\,dt+2\|f\|_\infty\int_{|t|>\delta}P(t, y)\,dt \\ &= \varepsilon\cdot 1+2\|f\|_\infty\int_{|t|>\delta} P(t, y)\,dt.\end{aligned}$$

但对固定的 $\delta>0$，当 $y\to 0$ 时，

$$\int_{|t|>\delta} P(t, y)\,dt\leqslant c_n y\int_{|t|>\delta} |t|^{-(n+1)}\,dt$$

趋向 0. 因而，对所有 $x\in F$，若 y 充分小，则有 $|u(x, y)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 如果 $f\in C_0$，那么它一致连续，因而可以找到 $\delta>0$，使对一切 $x\in E_n$，当 $|t|<\delta$ 时，有 $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$，故得出当 $y\to 0$ 时，$u(x, y)$ 一致收敛于 $f(x)$. 这就证明了定理[4]. 】

$L^1(E_n)$ 空间自然地嵌入于 E_n 上的有限 Borel 测度空间

---

4) 当 $f\in C_0$ 时，$\|u(\cdot, y)-f\|_\infty\to 0$ 是第一章定理 1.18 的特殊情形. 这里对 (b) 的证明是基于 Poisson 核的下述三个基本性质：(i) $P(x, y)\geqslant 0$; (ii) 对一切 $y>0$，$\int_{E_n} P(x, y)\,dx=1$; (iii) 若 $\delta>0$，则当 $y\to 0$ 时，$\int_{|x|>\delta} P(x, y)\,dx\to 0$ ((i) 显然成立，(iii) 刚才证明过，(ii) 就是第一章引理 1.17 之 (b)). 一个满足这三个性质的核常称为**恒等逼近**. 显然，Gauss-Weierstrass 核也具有

$M(E_n)$ 中(见前章定理 3.19 的证明). 许多与 $L^1(E_n)$ 空间相关的概念和结果可以扩张到 $M(E_n)$ 上. 例如在第一章中, 我们对 Fourier 变换、卷积运算和定理 1.3 都这样做过. 类似地, 现在, 也对定理 2.1 这样做.

定理 2.3 若 $\mu\in M(E_n)$, $u(x, y)=\int_{E_n} P(x-t, y)\,d\mu(t)$ 是 μ 的 Poisson-Stieltjes 积分, 则 u 在 E_{n+1}^+ 上调和, 且有

$$\|u(\cdot, y)\|_1=\int_{E_n}|u(x, y)|\,dx\leqslant\|\mu\|, \tag{2.4}$$

此处, $\|\mu\|$ 是 μ 的全变差 $|\mu|(E_n)$. 此外, 对一切 $\varphi\in C_0$, 有

$$\lim_{y\to 0}\int_{E_n} u(x, y)\varphi(x)\,dx=\int_{E_n}\varphi(x)\,d\mu(x),$$

即 $u(\cdot, y)$ 按弱* 拓扑收敛于 μ.

证明 用与定理 1.10(以及定理 2.1)相同的证明方法, 可知 u 是调和的. 不等式 (2.4) 则是把第一章定理 1.3 推广到 Borel 测度后的直接推论, 这一推广曾在定理 1.3 后面谈到过. 弱*收敛性可如下证明: 如果 $\varphi\in C_0$, 且 $v(x, y)$ 是其 Poisson 积分, 那么

$$\begin{aligned}\int_{E_n} u(x, y)\varphi(x)\,dx&=\int_{E_n}\left(\int_{E_n} P(x-t, y)\,d\mu(t)\right)\varphi(x)\,dx\\&=\int_{E_n}\left(\int_{E_n} P(x-t, y)\varphi(x)\,dx\right)d\mu(t)\\&=\int_{E_n} v(t, y)\,d\mu(t).\end{aligned}$$

因而, 根据定理 2.1 之(b), 在 $y\to 0$ 时, $\|v(\cdot, y)-\varphi\|_\infty\to 0$. 于是, 当 $y\to 0$ 时, 有

$$\left|\int_{E_n} u(x, y)\varphi(x)\,dx-\int_{E_n}\varphi(t)\,d\mu(t)\right|$$

这三个性质. 读者会注意到, 将 (b) 之证明的后一部分略加修改(以 L^p 范数 $(1\leqslant p<\infty)$ 代替 L^∞ 范数), 就得到定理 1.18 在 $\varphi(x)=P(x, 1)$ 时的另一证明. 这样处理的优越性在于没有用到卷积运算(例如在定理 1.9 中, 类似的性质(a), (b), (c)能使我们得到球上 Dirichlet 问题的解: 定理 1.10). 稍后, 在第三章定理 5.6 中, 还要利用这种方法对其它类型的 Poisson 积分建立 L^p 型收敛.

$$= \left| \int_{E_n} \{v(t, y) - \varphi(t)\} \, d\mu(t) \right|$$

$$\leqslant \int_{E_n} |v(t, y) - \varphi(t)| \, |d\mu|(t)$$

$$\leqslant \|v(\cdot, y) - \varphi\|_\infty |\mu|(E_n) \to 0.$$

定理证毕.]

本节的主要结果是证明定理 2.1 的逆命题. 不等式 (2.2) 曾断言 L^p 范数 $\|u(\cdot, y)\|_p$ 对 $y>0$ 有界. 我们现在证明它也是 u 做为 Poisson 积分的充分条件.

定理 2.5 若 $u(x, y)$ 在 E^+_{n+1} 上调和, 且存在一个 $p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 和一个常数 $c>0$, 使得对一切 $y>0$, 有

$$\|u(\cdot, y)\|_p = \left(\int_{E_n} |u(x, y)|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant c \leqslant \infty,$$

则有:

(a) 当 $1<p\leqslant\infty$ 时, $u(x, y)$ 是 $L^p(E_n)$ 中一个函数 f 的 Poisson 积分.

(b) 当 $p=1$ 时, $u(x, y)$ 是一个有限 Borel 测度的 Poisson-Stieltjes 积分. 再若 $u(\cdot, y)$ 在 $y\to 0$ 时按 L^1 范数满足 Cauchy 条件, 则 $u(x, y)$ 是 $L^1(E_n)$ 中一个函数 f 的 Poisson 积分.

证明 在 $1<p\leqslant\infty$ 时, 若对一切 $y>0$, 有 $\|u(\cdot, y)\|_p\leqslant c<\infty$, 则存在一个序列 $\{y_k\}$, $y_k\to 0(k\to\infty)$, 和一个函数 $f\in L^p(E_n)$, 使得 $u(\cdot, y_k)$ 弱收敛于 f(当 $k\to\infty$). 也就是说, 当 $1/p+1/p'=1$ 时, 对每个 $g\in L^{p'}(E_n)$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_n} u(x, y_k) g(x) \, dx = \int_{E_n} f(x) g(x) \, dx.$$

在 $p=1$ 时, 则存在一个有限 Borel 测度 μ, 它是序列 $\{u(\cdot, y_k)\}$ 的弱*极限. 即对每个 $g\in C_0$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_n} u(x, y_k) g(x) \, dx = \int_{E_n} g(x) \, d\mu(x).$$ [5]

5) 这些结果是下述事实的特殊情形: Banach 空间的对偶空间中之单位球按弱*拓扑是列紧的. 文中关于 $p=1$ 时的结论, 常称作 Helly 定理 (见第一章的文献注释).

因为对每个 $y>0$，有 $P(\cdot, y)\in L^{p'}(E_n)$，$1\leqslant p'\leqslant\infty$，同时有 $P(\cdot, y)\in C_0$. 所以特别有：当 $1<p\leqslant\infty$ 时，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_n} P(x-t, y)u(t, y_k)\,dt=\int_{E_n} P(x-t, y)f(t)\,dt$$
$$=v(x, y).$$

当 $p=1$ 时，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_n} P(x-t, y)u(t, y_k)\,dt=\int_{E_n} P(x-t, y)\,d\mu(t)$$
$$=v(x, y).$$

如果我们能证明，在上述两种情形中都有 $u(x, y)=v(x, y)$，那么就证明了 (a) 及 (b) 之前部. 而这一事实正是下面两个引理的直接推论$\Big($因下面两个引理蕴含 $u(x, y+y_k)=\int_{E_n} P(x-t,y)u(t,y_k)\,dt\Big)$：

引理 2.6 如果 $u(x, y)$ 满足定理 2.5 的假设，那么存在一个常数 $A=A_{n,p}>0$，使得

$$\|u(\cdot, y)\|_\infty=\sup_{x\in E_n}|u(x, y)|\leqslant Acy^{-n/p}.$$

特别地，u 在每个本征子半空间

$$E^+_{n+1,y_0}=\{(x, y)\in E_{n+1}: y\geqslant y_0>0\}\subset E^+_{n+1}$$

上有界.

引理 2.7 若 $u(x, y)$ 在 E^+_{n+1} 上调和，且在每个本征子半空间上有界，则对一切 $y_1, y_2>0$，

$$u(x, y_1+y_2)=\int_{E_n} u(t, y_1)\,P(x-t, y_2)\,dt.$$

前一个引理是调和函数的平均值性质的简单推论：令 Ω_{n+1} 是 E_{n+1} 中单位球的体积，则 $\Omega_{n+1}=\omega_n/(n+1)$，且

$$u(x, y)=u(x, y)\,\frac{n+1}{(y/2)^{n+1}}\int_0^{y/2} r^n\,dr$$
$$=[(n+1)2^{n+1}/y^{n+1}]\int_0^{y/2}\mathscr{M}_{(x,y),u}(r)r^n\,dr$$
$$=[(n+1)2^{n+1}/y^{n+1}\omega_n]$$

$$\times \int_0^{y/2} \left\{ \int_{\Sigma_n} u(x_1+rt_1', \cdots, x_n+rt_n', y+rt_{n+1}')\, dt' \right\} r^n\, dr$$

$$= (2^{n+1}/\Omega_{n+1}) y^{-(n+1)}$$

$$\times \int_{|t|<y/2} u(x_1+t_1, \cdots, x_n+t_n, y+t_{n+1})\, dt.$$

因而，若令 $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \eta) = (\xi, \eta)$，$A = (2^{n+1}/\Omega_{n+1})^{1/p}$，便有

$$|u(x, y)| \leqslant (2^{n+1}/\Omega_{n+1}) y^{-(n+1)} \int_{|(x,y)-(\xi,\eta)|<y/2} |u(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta$$

$$\leqslant (2^{n+1}/\Omega_{n+1}) y^{-(n+1)}$$

$$\times \left(\int_{|(x,y)-(\xi,\eta)|<y/2} |u(\xi, \eta)|^p\, d\xi\, d\eta \right)^{1/p}$$

$$\times (\Omega_{n+1} y^{n+1}/2^{n+1})^{1-(1/p)}$$

$$\leqslant A y^{-(n+1)/p} \left[\int_{y/2}^{3y/2} \left\{ \int_{\xi\in E_n} |u(\xi, \eta)|^p\, d\xi \right\} d\eta \right]^{1/p}$$

$$\leqslant A y^{-(n+1)/p} \left[\int_{y/2}^{3y/2} c^p\, d\eta \right]^{1/p} = A c y^{-(n+1)/p} y^{1/p}$$

$$= A c y^{-n/p}.$$

为证明引理 2.7，我们固定 $y_0>0$，且对 $y\geqslant 0$ 记 $w(x, y) = u(x, y+y_0)$．又对 $(x, y)\in E_{n+1}^+$，令

$$w_1(x, y) = \int_{E_n} u(t, y_0) P(x-t, y)\, dt.$$

如果能证明 $w\equiv w_1$，引理便得证．

由引理 2.6 可知，函数 w 在 E_{n+1}^+ 中调和，并在 $\overline{E_{n+1}^+}$ 上连续、有界．根据定理 2.1(其中之(a)、(b))，若令 $w_1(x, 0) = u(x, y_0)$，则可将 w_1 扩张到 $\overline{E_{n+1}^+}$ 上，从而得到一个在 $\overline{E_{n+1}^+}$ 上连续、有界且在 E_{n+1}^+ 中调和的函数．因而，函数 $h = w_1 - w$ 也是在 $\overline{E_{n+1}^+}$ 上连续、有界且在 E_{n+1}^+ 中调和的．又因为对一切 $x\in E_n$，有 $h(x, 0) = 0$，依推论 1.15，知 h 必恒等于 0．于是 $w_1\equiv w$ 成立．

我们还需证明定理 2.5 的最后一部分．如果 $u(\cdot, y)$ 按 L^1 范数满足 Cauchy 条件，则根据 L^1 的完备性，必存在一个 $f\in L^1(E_n)$，使得当 $y\to 0$ 时，有 $\|u(\cdot, y)-f\|_1\to 0$．因此，对 $g\in$

$L^\infty(E_n)$，有 $\int_{E_n} u(x, y)g(x)\,dx \to \int_{E_n} f(x)g(x)\,dx \ (y\to 0)$. 现在，可以用建立定理2.5(a) 的同样证法，证明 u 是 L^1 中函数 f 的 Poisson 积分. 】

§3 Hardy-Littlewood 极大函数和调和函数的非切向收敛性

至此，对 E^+_{n+1} 上调和函数在边界处的收敛问题，我们只考虑过一种类型. 例如，我们曾证明，当 u 是 Poisson 积分时，几乎对每个 $x_0\in E_n$，当点 (x, y) 沿直线 $x=x_0$"向下"逼近 $(x_0, 0)$ 时，存在边界值

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x, y) \tag{3.1}$$

(见定理 2.1). 然而还有一个更一般些的重要结果成立；甚至当 (x, y) 沿着更一般的路径逼近 $(x_0, 0)$ 时，极限 (3.1) 几乎处处存在. 这些路径是非切向路径. 在更确切叙述"非切向路径"这个概念之前，我们先研究一个算子——Hardy-Littlewood极大算子. 它的基本性质可用来证明这些更一般的极限的存在性.

这个算子作用于每个 $f\in L^p(E_n)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$，就得到一个定义在 $x\in E_n$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数 m_f:

$$m_f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)|\,dt$$

$$=\sup_{S_x}\frac{1}{|S_x|}\int_{S_x}|f(t)|\,dt,$$

其中 Ω_n 是单位球 $\{t\in E_n,\ |t|\leqslant 1\}$ 的"体积"(Lebesgue 测度)，最后一个上确界是对一切以 x 为心、半径是正数的球 S_x 取的，$|S_x|$ 是 S_x 的 Lebesgue 测度(于是，若 S_x 的半径为 r，则 $|S_x|=\Omega_n r^n$). 有时，为了与方形极大函数

$$\overline{m}_f(x)=\sup_{Q_x}\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x}|f(t)|\,dt.$$

(其中，上确界是对一切以 x 为心且其边平行于轴的非退化立方体

Q_x 来取的，$|Q_x|$ 表示 Q_x 的 Lebesgue 测度）区别起见，常称 m_f 为球形极大函数．显然，如果 f 本性有界，则 $m_f(x)$，$\overline{m}_f(x)$ 皆不超过 $\|f\|_\infty$．我们将证明，对于 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$m_f(x)$ 与 $\overline{m}_f(x)$ 几乎处处有限．

给定一个以 x 为心，以 $r>0$ 为半径的球 S_x，设 q_x 是其内接立方体（因而其对角线长为 $2r$），又设 Q_x 是其外切立方体（因而其边长为 $2r$），并设二者的边皆平行于轴．那么，显然存在两个仅依赖于维数的常数 a_n、A_n，使得

$$|Q_x|\leqslant A_n|S_x|,\quad |S_x|\leqslant a_n|q_x|.$$

于是，
$$\frac{1}{|S_x|}\int_{S_x}|f(t)|\,dt\leqslant\frac{A_n}{|Q_x|}\int_{Q_x}|f(t)|\,dt.$$

由此推出，

(3.2)
$$m_f(x)\leqslant A_n\overline{m}_f(x).$$

类似地，有

(3.2′)
$$\overline{m}_f(x)\leqslant a_n m_f(x).$$

我们对球形极大函数 m_f 更感兴趣．不过在某些情况下，更容易对 $\overline{m}_f$ 建立所需的估计式．于是，不等式 (3.2) 和 (3.2′) 就可用来得出对 m_f 的相应结果．下面的引理可用以证明 $\overline{m}_f<\infty$ 几乎处处成立（因而，$m_f<\infty$ 几乎处处成立）．

引理 3.3 设 $R_1\subset R_2\subset\cdots\subset R_k$ 是 E_n 中以 0 为中心、其边平行于轴的非空开矩形．假定 $S\subset E_n$ 为一有界集，对每一 $x\in S$，记 $i(x)$ 是满足 $1\leqslant i(x)\leqslant k$ 的一个整数．如果令

$$R^x=\{u\in E_n: u-x\in R_{i(x)}\},$$

则存在 S 中的有限多个点 x_1, x_2, $\cdots$, x_l，使得 $S\subset R^{x_1}\cup R^{x_2}\cup\cdots\cup R^{x_l}$，并且使 E_n 中之每个点 v 至多属于 R^{x_1}, $\cdots$, R^{x_l} 中之 2^n 个．

证明 选 x_1，使 $i(x_1)$ 尽可能最大（这是可能的，因为 $i(x)\leqslant k$）．选好以后，再选 $x_2\in S-R^{x_1}$，使 $i(x_2)$ 尽可能最大，并继续做下去，选 $x_3\in S-(R^{x_1}\cup R^{x_2})$，使 $i(x_3)$ 最大，如此等等．于是得到一个开矩形的序列 R^{x_1}, R^{x_2}, $\cdots$，它们分别以 x_1, x_2, $\cdots$ 为中心，且每个中心 x_j 不属于另外的矩形 R^{x_i}，$i\neq j$．而这就意味着 x_i 和

$x_j(i\neq j)$ 的距离必须超过 R_1(最小矩形)的最短边长之半. 根据假定, 这个边长之半为正数, S 又是有界集, 所以序列 x_1, x_2, $\cdots$ 是有限的, 从而, 选 x_i 的过程在进行到某一步, 譬如第 l 步时, 就得到 S 的复盖 $\{R^{x_1}, \cdots, R^{x_l}\}$.

余下需证明, 点 $v\in E_n$ 至多属于矩形 $R^{x_1}, \cdots, R^{x_l}$ 中的 2^n 个. 为此, 我们考虑通过 v 且平行于坐标超平面的超平面. 这些超平面组成了 2^n 个以 v 为顶点的"卦限", 它们复盖了整个 E_n. 设两点 x_i, $x_j(1\leqslant i, j\leqslant l)$ 属于同一卦限, 而 R^{x_i}, R^{x_j} 都包含 v. 因为 R^{x_i}, R^{x_j} 都是由 $R_1, \cdots, R_k$ 之一作平移而得, 所以必有其中之一, 比如说 R^{x_i}, 它的各边至少同 R^{x_j} 的各边同样长. 然而这一事实连同 $v\in R^{x_i}\cap R^{x_j}$, 就推出 $x_j\in R^{x_i}$. 这与中心 x_j 不能属于另一矩形 R^{x_i} 相矛盾. 因此, 至多只有一个其中心在任一给定的卦限内的矩形能包含 v. 引理得证. 】

定理 3.4 存在一个只依赖于维数的常数 $c=c(n)$, 使得对于 $f\in L^1(E_n)$, 及

$$F_s=\{x\in E_n: m_f(x)>s>0\},$$

有

$$|F_s|\leqslant\frac{c}{s}\|f\|_1.$$

这里的 $|F_s|$ 表示 F_s 的 Lebesgue 测度. 特别地, 对几乎每个 $x\in E_n$, 有 $m_f(x)<\infty$.

证明 我们要证明, 对每个 $s>0$, 有

$$|\{x\in E_n:\overline{m}_f(x)>s\}|\leqslant 2^n\frac{\|f\|_1}{s}. \tag{3.5}$$

因由(3.2), $F_s\subset\{x\in E_n:\overline{m}_f(x)>s/A_n\}$, 我们就得到

$$|F_s|\leqslant|\{x\in E_n:\overline{m}_f(x)>s/A_n\}|\leqslant\frac{2^nA_n\|f\|_1}{s}.$$

取 $c=2^nA_n$, 就证明了定理.

设 S 是 $\{x\in E_n: \overline{m}_f(x)>s\}$ 中的任一紧子集. 因而对每一个 $x\in S$, 存在立方体 Q_x, 使得

$$\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x}|f(t)|\,dt>s.$$

根据积分的连续性，存在 x 的邻域 U，使对每个 $u\in U$，

$$\frac{1}{|Q_u|}\int_{Q_u}|f(t)|\,dt>s,$$

此处，$Q_u=\{(w-x)+u;\ w\in Q_x\}$ 是以 u 为心，并与 Q_x 同样大小的立方体. 因 S 是紧集，所以有有限多个这样的邻域覆盖 S. 因此，有有限多个中心在 0 的立方体 $Q_1\subset\cdots\subset Q_k$，使得对每个 $x\in S$，存在一个整数 $i(x)$，$1\leqslant i(x)\leqslant k$，有

$$\frac{1}{|Q^x|}\int_{Q^x}|f(t)|\,dt>s,$$

其中 $Q^x=\{u\in E_n: u-x\in Q_{i(x)}\}$. 再根据引理 3.3，我们可以找出 S 中的有限多个点 $x_1,\ \cdots,\ x_l$，使得

$$S\subset Q^{x_1}\cup\cdots\cup Q^{x_l},$$

且使每个 $v\in E_n$ 至多属于这些立方体中的 2^n 个. 若用 χ_A 表示集合 A 的特征函数，则最后这个性质等价于

$$\sum_{j=1}^{l}\chi_{Q^{x_j}}\leqslant 2^n\chi_{\cup_{j=1}^{l}Q^{x_j}}.$$

那么，

$$\begin{aligned}|S|&\leqslant\left|\bigcup_{j=1}^{l}Q^{x_j}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{l}|Q^{x_j}|\leqslant\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{l}\int_{Q^{x_j}}|f(t)|\,dt\\&=\frac{1}{s}\int_{E_n}\left\{\sum_{j=1}^{l}\chi_{Q^{x_j}}(t)\right\}|f(t)|\,dt\\&\leqslant\frac{2^n}{s}\int_{E_n}\chi_{\cup_{j=1}^{l}Q^{x_j}}(t)\,|f(t)|\,dt\\&\leqslant\frac{2^n}{s}\|f\|_1.\end{aligned}$$

由于 S 是 $\{x\in E_n:\ \overline{m}_f(x)>s\}$ 的任一子集，于是不等式 (3.5) 得证，因而定理立即得证. 】

我们已经看到，对任一 $g\in L^\infty(E_n)$，$m_g(x)\leqslant\|g\|_\infty<\infty$，而从定理 3.4 我们又知，当 $f\in L^1(E_n)$ 时，对几乎一切 x，$m_f(x)<\infty$. 由这二个事实就得出，当 $h\in L^p(E_n)$，$1<p<\infty$ 时，$m_h(x)<\infty$，几乎处处成立. 为此，首先注意到极大算子是一个次线性算子. 次线性算子是指：将定义在测度空间上的可测函数所构成的线性空

间，映射到定义在(可能是)另一个测度空间上的可测函数的算子 T，满足

(i) $$|[T(f+g)](x)| \leqslant |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)|$$

几乎处处成立(这一性质称为次可加性)，及

(ii) $$|T(af)| = |a|\,|Tf|,$$

其中 a 是常数，f 在 T 的定义域内．于是，如果对 $h \in L^p(E_n)$，我们令

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & |h(x)| \leqslant 1; \\ 0, & |h(x)| > 1, \end{cases}$$

并令 $f = h - g$，则 $g \in L^\infty(E_n)$，$f \in L^1(E_n)$．由性质 (i) (次可加性)，知

$$m_h(x) = m_{f+g}(x) \leqslant m_f(x) + m_g(x).$$

因而，对几乎一切 x，$m_h(x) < \infty$．当然，所有这些结论，对方形极大函数也是正确的．

极大算子作为一个定义在 $L^1(E_n)$ 上的映射，不是到 $L^1(E_n)$ 内的有界变换(例如，当 f 是区间 $[0, 1]$ 的特征函数时，$m_f(x)$ 甚至是不可积的)．然而定理 3.4 告诉我们，它是"几乎"有界的．为了叙述得更确切，我们引进分布函数的概念．对 $g \in L^p(E_n)$，g 的分布函数 $\lambda = \lambda_g$ 是：对 $s > 0$，$\lambda(s)$ 是集合 $F_s = \{x \in E_n : |g(x)| > s\}$ 的 Lebesgue 测度[6]．于是我们得到一个正实轴上的非增函数 λ．显然，$s^p \lambda(s) = \int_{F_s} s^p\, dx \leqslant \int_{F_s} |g|^p\, dx \leqslant \|g\|_p^p$．就是说，$\lambda(s)$ 被常数倍的 s^{-p} 控制．而这个条件显然不能保证 $|g|^p$ 的可积性．另一方面，等式

$$\|g\|_p^p = -\int_0^\infty s^p\, d\lambda(s) = p\int_0^\infty s^{p-1} \lambda(s)\, ds \tag{3.6}$$

(当 g 是简单函数时，立即可得这一等式．对于一般情形，可用简单函数从下方逼近 $|g|$ 来得到) 表明，条件 $\lambda(s) \leqslant (\text{常数}) s^{-p}$ 与

---

6) 显然，分布函数可以更广泛地对任何测度空间上的任一可测函数来定义．在第五章中，我们将研究这些更广泛的分布函数的性质．

$\int |g|^p$ 的有限性差不多相当. 而定理 3.4 告诉我们, m_f 具有分布函数 λ, 满足 $\lambda(s)\leqslant c\|f\|_1 s^{-1}$. 正是在这种意义下, 我们说极大算子作为 $L^1(E_n)$ 上的算子几乎有界.

但是, 若限制在 $L^p(E_n)(1<p\leqslant\infty)$ 上考虑极大算子, 则它是有界的.

定理 3.7 存在一个依赖于维数 n 和指标 $p>1$ 的常数 $b=b(p, n)$, 使得对一切 $f\in L^p(E_n)$, 有

$$\|m_f\|_p\leqslant b\|f\|_p.$$

证明 设 $f\in L^p(E_n)$, $1<p\leqslant\infty$, $s>0$. 对每一个 $x\in E_n$, 令

$$f^s(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } |f(x)|>s;\\ 0, & \text{当 } |f(x)|\leqslant s,\end{cases}$$

$$f_s(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |f(x)|>s;\\ f(x), & \text{当 } |f(x)|\leqslant s.\end{cases}$$

那么, $f=f^s+f_s$, 且有 $f^s\in L^1(E_n)$ 与 $f_s\in L^\infty(E_n)$.

设 λ, λ^s, λ_s 分别为 m_f, m_{f^s}, m_{f_s} 的分布函数. 由次可加性知 $m_f\leqslant m_{f^s}+m_{f_s}$, 从而有 $\lambda(2s)\leqslant\lambda^s(s)+\lambda_s(s)$. 我们已经知道, 本性有界函数 g 的极大函数以 $\|g\|_\infty$ 为界. 因此 $m_{f_s}(x)\leqslant\|f_s\|_\infty\leqslant s$, 故 $\lambda_s(s)=0$. 从而 $\lambda(2s)\leqslant\lambda^s(s)$.

于是, 由(3.6)、定理 3.4 和上述不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
\|m_f\|_p^p&=p2^p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda(2s)\,ds\\
&\leqslant p2^p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda^s(s)\,ds\\
&\leqslant p2^p\int_0^\infty s^{p-1}cs^{-1}\left\{\int_{E_n}|f^s(x)|\,dx\right\}ds\\
&=p2^pc\int_0^\infty s^{p-2}\left\{\int_{|f(x)|>s}|f(x)|\,dx\right\}ds\\
&=p2^pc\int_{E_n}|f(x)|\left\{\int_0^{|f(x)|}s^{p-2}\,ds\right\}dx\\
&=\frac{p2^pc}{p-1}\int_{E_n}|f(x)|\,|f(x)|^{p-1}\,dx,
\end{aligned}$$

由此及 $b=b(p,n)=2[pc/(p-1)]^{1/p}$，就证明了定理．】

m_f 的另一个表达法如下：

设 φ 是单位球体 $\{x\in E_n: |x|\leqslant 1\}$ 上的特征函数除以 Ω_n 后的函数$\left(\text{故有} \int_{E_n}\varphi(x)\,dx=1\right)$．对 $\varepsilon>0$，令 $\varphi_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n}\varphi(t/\varepsilon)$．那么，若 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$（为简单起见，假定 $f\geqslant 0$），我们便有，

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)=\frac{1}{\varepsilon^n\Omega_n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}f(x-t)\,dt.$$

因而

$$m_f(x)=\sup_{\varepsilon>0}(f*\varphi_\varepsilon)(x). \tag{3.8}$$

类似地，如果 φ 是立方体 $\left\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in E_n:\ -\frac{1}{2}\leqslant x_j\leqslant\frac{1}{2},\ j=1,2,\cdots,n\right\}$ 的特征函数，则 (3.8) 式右端给出 $\overline{m}_f(x)$．我们已经看到，$\overline{m}_f(x)$ 与 $m_f(x)$ 在(3.2)和(3.2′)成立的意义下是“等价”的．那么，我们自然会问：当 $\varphi\geqslant 0$ 是更一般的函数时，(3.8) 中的上确界与 m_f 有什么关系．

例如，设 $\varphi=\sum_{k=1}^{m}c_k\chi_k$，其中，$c_k>0$，$\chi_k$ 是球 $\sigma_k=\{x\in E_n:\ |x|\leqslant r_k\}$ 的特征函数．那么，对 $f\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}(f*\varphi_\varepsilon)(x)&=\sum_{k=1}^{m}c_k\varepsilon^{-n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon r_k}f(x-t)\,dt\\&=\sum_{k=1}^{m}c_kr_k^n\Omega_n\frac{1}{\Omega_n(\varepsilon r_k)^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon r_k}f(x-t)\,dt\\&\leqslant m_f(x)\sum_{k=1}^{m}c_k|\sigma_k|=m_f(x)\|\varphi\|_1.\end{aligned}$$

就是说

$$\sup_{\varepsilon>0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)\leqslant m_f(x)\|\varphi\|_1. \tag{3.9}$$

上述结果显然可推广到任一具有 $\psi(t)=\psi(|t|)$ 形式的函数 $\varphi\in L^1(E_n)$ 上（即 φ 是径向函数），其中 φ 是 $[0,\ \infty)$ 上任一非负递降函数．我们只需用上面所说的简单函数的递增序列从下方逼近 φ，并对其应用 Lebesgue 单调收敛定理．

如果特别选 $\varphi(t)=c_n/(|t|^2+1)^{(n+1)/2}$，那么对 $y>0$，$u(x, y)=(f*\varphi_y)(x)$ 就是 f 的 Poisson 积分，我们便有下述定理：

定理 3.10 若 $u(x, y)(y>0)$ 是 $f\in L^p(E_n)$ 的 Poisson 积分，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则 $|u(x, y)|\leqslant m_f(x)$.

建立这一不等式的反向不等式是不困难的.

定理 3.11 若 $f\geqslant 0$，且 f 的 Poisson 积分

$$u(x, y)=\int_{E_n} f(x-t)P(t, y)\,dt,\ y>0$$

有意义(例如，$f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$)，则存在一个仅依赖于维数的常数 $A=A(n)$，使得

$$m_f(x)\leqslant A\{\sup_{y>0} u(x, y)\}.$$

证明 固定 $r>0$，那么有

$$\begin{aligned}\sup_{y>0} u(x, y)\geqslant u(x, r)&=c_n\int_{E_n} f(x-t)\frac{r}{(|t|^2+r^2)^{(n+1)/2}}\,dt\\&\geqslant c_n'\int_{|t|\leqslant r} f(x-t)r^{-n}\,dt\\&=c_n'\Omega_n\left\{\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|\leqslant r} f(x-t)\,dt\right\}.\end{aligned}$$

把右端的表达式对一切 $r>0$ 取上确界，记 $A(n)=1/c_n'\Omega_n$，就得到定理的结论. 】

极大函数算子的重要性在于，它能控制分析学中的许多重要算子. 我们刚才看到的 Poisson 积分就是这种情况的一例. 下面的定理给出了一种方法，即利用这种控制性质来得到许多(今后将会遇到的)算子族的点态收敛性.

定理 3.12 设 $\{T_\varepsilon\}$，$0<\varepsilon$，是一族从 $L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，映射到 E_n 上可测函数空间的线性算子. 对每一个 $h\in L^p(E_n)$，定义 Mh 如下：对每一 $x\in E_n$，$(Mh)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|(T_\varepsilon h)(x)|$. 再设存在一常数 $a>0$ 和实数 $q\geqslant 1$，使对一切 $\lambda>0$ 和 $h\in L^p(E_n)$，有

(3.13) $$|\{x:(Mh)(x)>\lambda\}|\leqslant(a\|h\|_p\lambda^{-1})^q.$$

若存在 $L^p(E_n)$ 的一个稠子集 $\mathscr{D}$，使得当 $g\in\mathscr{D}$ 时，$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x)$

几乎处处存在且有限，则对每个 $f\in L^p(E_n)$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ 几乎处处存在且有限.

证明 设 f 是 $L^p(E_n)$ 中的函数. 对每个正数 k 和趋向于 $(0,0)$ 的无穷多个数对 $(\varepsilon',\varepsilon'')$，设 F_k 为 E_n 中能使 $|(T_{\varepsilon'}f)(x)-(T_{\varepsilon''}f)(x)|>2k^{-1}$ 成立的一切点 x 组成的集合. 对每个 $\eta>0$，可在 $L^p(E_n)$ 中找到 g、h，使 $f=g+h$，且 $g\in\mathscr{D}$，$\|h\|_p\leqslant\eta$. 我们将证明，$|F_k|\leqslant(2a(k+1)\eta)^q$，这样，因为 η 是任意的，F_k 就为零测度集. 因而 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ 为零测度集，且对 $x\in E_n-F$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ 存在并有限. 那么，便能证明定理.

现在令 G 是使 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x)$ 存在并有限的一切 $x\in E_n$ 的集合. 由于 E_n-G 有零测度，故只需证明 $|F_k\cap G|\leqslant(2a(k+1)\eta)^q$. 又由于 $(T_{\varepsilon'}f)(x)-(T_{\varepsilon''}f)(x)=\{(T_{\varepsilon'}h)(x)-(T_{\varepsilon''}h)(x)\}+\{(T_{\varepsilon'}g)(x)-(T_{\varepsilon''}g)(x)\}$，而且对 $x\in G$，$\lim\limits_{\varepsilon',\varepsilon''\to 0}\{(T_{\varepsilon'}g)(x)-(T_{\varepsilon''}g)(x)\}=0$，所以，对趋向 $(0,0)$ 的无穷多个数对 $(\varepsilon',\varepsilon'')$，在 E_n 中能使 $|(T_{\varepsilon'}h)(x)-(T_{\varepsilon''}h)(x)|\geqslant k^{-1}$ 的 x 组成的集合包含 $F_k\cap G$. 而对那些 x，当然有 $(Mh)(x)\geqslant(2k)^{-1}$，因而 $F_k\cap G\subset\{x\in E_n;\ (Mh)(x)>2^{-1}(k+1)^{-1}\}$. 则欲证之不等式 $|F_k\cap G|\leqslant(a\eta 2(k+1))^q$ 就可根据假设推出. 】

这种算子族的一个例子是：对 $\varepsilon>0$，定义 $T_\varepsilon f$ 为

$$(T_\varepsilon f)(x)=(\varepsilon^n\Omega_n)^{-1}\int_{|t|<\varepsilon}f(x-t)\,dt,\ x\in E_n.$$

此时，$Mf=m_f$，并且从定理 3.4 知，对于 $f\in L^1(E_n)$，有

$$|\{x:(Mf)(x)>\lambda\}|\leqslant c\|f\|_1\lambda^{-1}.$$

进而，若 g 属于具紧支集的连续函数类（$L^1(E_n)$ 的稠子集），则显然有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x)=g(x)$. 于是，根据定理 3.12，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ 几乎处处存在且有限. 由此还容易得出，几乎每个 x 都是 f 的积分的可微点（见第一章(1.23)和(1.24)）. 更确切地说，我们有

推论 3.14 若 f 在 E_n 上局部可积（即 f 在 E_n 的任一有界子

集上可积)，则对几乎每个 $x\in E_n$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int_{|t|<\varepsilon}[f(x-t)-f(x)]\,dt=0.$$

证明 由于问题是局部的，所以可以假定 $f\in L^1(E_n)$ (否则，可用一个以 0 为心、r 为半径的球上的特征函数乘 f，并对球内的点得出所要证的几乎处处收敛性．然后令 $r\to\infty$，便知对 E_n 的点也几乎处处成立)．我们已经知道，对几乎一切 x，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^n\Omega_n)^{-1}\int_{|t|<\varepsilon}f(x-t)\,dt$$

存在并有限，故只需证明其极限几乎处处等于 $f(x)$．而由于在 $|t|\to 0$ 时，L^1 连续模 $\omega_{1,f}(t)\to 0$ (见第一章定理 1.18 之证明)，故当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\|T_\varepsilon f-f\|_1=\int_{E_n}\left|\frac{1}{\varepsilon^n\Omega_n}\int_{|t|<\varepsilon}[f(x-t)-f(x)]\,dt\right|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^n\Omega_n}\int_{|t|<\varepsilon}\left\{\int_{E_n}|f(x-t)-f(x)|\,dx\right\}dt\to 0.$$

因此，存在一个趋于 0 的序列 $\{\varepsilon_k\}$，使得当 $k\to\infty$ 时，几乎处处有 $(T_{\varepsilon_k}f)(x)\to f(x)$．于是几乎处处有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)=f(x)$． 】

这种方法可直接用到 Poisson 积分上，且由此可给出定理2.1 的一个直接证明．然而我们的目标是把这个定理推广到本节开始时提到过的更一般的非切向逼近边界的问题．为此，我们首先把这个概念精确化，再证明 Poisson 积分有这样的一般边界值．

对 $\alpha>0$，$x_0\in E_n$，在 E^+_{n+1} 中以 $(x_0, 0)$ 为顶点、以 α 为锥度的锥是指区域：

$$\Gamma_\alpha(x_0)=\{(x, y)\in E^+_{n+1};\ |x-x_0|<\alpha y\}.$$

设 u 是 E^+_{n+1} 上的函数，如果对每个 $\alpha>0$，有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}u(x, y)=l, \tag{3.15}$$

其中，(x, y) 在锥 $\Gamma_\alpha(x_0)$ 内趋向 $(x_0, 0)$，我们就说 u 在 $x_0\in E_n$ 有非切向极限 l.

我们会在以后的内容中更加看清非切向逼近边界的重要性．

在将要建立的若干基本定理中，垂直逼近边界是不充分的（例如(5.4)）.

定理 3.16 若 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则对 f 的 Lebesgue 点集中的每一点 x_0, Poisson 积分

$$\int_{E_n} f(x-t)P(t,\ y)\,dt=u(x,\ y)$$

有非切向极限 $f(x_0)$. 特别地，上述事实在 E_n 上几乎处处成立.

证明 首先注意到，第一章定理 1.25 的证明在于说明对 f 的 Lebesgue 点集中的点 x_0, 有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{y\to0}\int_{E_n}|f(x_0-t)-f(x_0)|\,|\varphi_y(t)|\,dt\\&=\lim_{y\to0}\int_{E_n}|f(t)-f(x_0)|\,|\varphi_y(x_0-t)|\,dt.\end{aligned}$$

当 $\varphi_y(t)$ 是 Poisson 核 $P(t,\ y)=c_n[y/(y^2+|t|^2)^{(n+1)/2}]$ 时，我们容易对 $(x,\ y)\in\Gamma_\alpha(x_0)$ 建立不等式：

$$\begin{aligned}P(x-t,\ y)&=\varphi_y(x-t)\leqslant d_\alpha\varphi_y(x_0-t)\\&=d_\alpha P(x_0-t,\ y),\end{aligned}\tag{3.17}$$

其中，$d_\alpha^{2/(n+1)}=\max\{1+2\alpha^2,\ 2\}$. 因而，利用第一章引理 1.17 之 (b)，得到

$$\begin{aligned}|u(x,\ y)-f(x_0)|&=\left|\int_{E_n}f(t)P(x-t,\ y)dt\right.\\&\qquad\left.-f(x_0)\int_{E_n}P(x-t,\ y)\,dt\right|\\&\leqslant\int_{E_n}|f(t)-f(x_0)|P(x-t,\ y)\,dt\\&\leqslant d_\alpha\int_{E_n}|f(t)-f(x_0)|P(x_0-t,\ y)\,dt\\&=d_\alpha\int_{E_n}|f(t)-f(x_0)|\varphi_y(x_0-t)\,dt,\end{aligned}$$

但因等式末项当 $y\to0$ 时趋于 0，故定理得证. 】

上一定理的直接推论是：在 E_n 的几乎所有点上，Poisson 积分 u 非切向有界，也就是说对几乎一切 $x_0\in E_n$, u 作为 E_{n+1}^+ 上的

函数，在各截锥 $\Gamma_\alpha(x_0)\cap\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ 0<y\leqslant 1\}$ 上有界(这些截锥的高度为 1. 由于所考虑的函数在 E_{n+1}^+ 上连续，所以截锥的高度是不重要的). 事实上，可用极大函数 m_f 给出有界性的定量表示：

$$\sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}|u(x,\ y)|\leqslant d_\alpha m_f(x_0). \tag{3.18}$$

此式是定理 3.10 和含有 Poisson 核的不等式 3.17 的简单推论.

下面的定理(在第六章中用以建立 H^p 空间理论的基本工具)表明，对调和函数而言，非切向极限和非切向有界基本上等价.

定理 3.19 设 u 在 E_{n+1}^+ 内调和，并在正测度子集 $S\subset E_n$ 的每个点上非切向有界，则 u 在 S 的几乎每一点上有非切向极限.

证明 我们只需证明，只要 $S\subset E_n$ 是正测度子集，u 在其上非切向有界，则存在 S 的一个正测度子集，对其中的点，u 有非切向极限. 继而只需再考虑有有理锥度 α 的锥 $\Gamma_\alpha(q)$，则可知，S 是子集 $F=F_{\alpha,m}$ 的可数和，使对所有

$$(x,\ y)\in\{\bigcup_{q\in F}\Gamma_\alpha(q)\}\cap\{p=(x,\ y);\ 0<y<2\}=\mathscr{A},$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots)^{7)}$$

有 $|u(x,\ y)|\leqslant m$. 就是说，u 在域 $\mathscr{A}$ 中一致有界，域 $\mathscr{A}$ 是由以 F 中之点为顶点、以超平面 $y=2$ 为上界的那些垂直截锥的并所组成.

容易看出，现在只需证明，对几乎每个 $q\in F$，当 p 在 $\Gamma_\alpha(q)$ 内趋向 q 时，$u(p)$ 有极限. 因为，如果对每个 $F=F_{\alpha,m}$，去掉使上述事实不成立的点集(记住，α 为有理数，m 为正整数)，则我们去掉的是零测度集；若 $q\in S$ 不属于这零测度集，又 $\beta>0$ 是任一有理锥度，那么存在一个正整数 k，使得对 $p\in\Gamma_\beta(q)$，$0<y<2$，有 $|u(p)|=|u(x,\ y)|\leqslant k$，即 $q\in F_{\beta,k}$. 因而，当 p 在 $\Gamma_\beta(q)$ 内趋向 q 时，$u(p)$ 有极限. 于是，u 在每个这样的 q 上有非切向极限.

为了进一步简化，我们可以将 $|u(x,\ y)|$ 除以 m，而认为在

---

7) 在整个证明中，一直沿用这样的记号：E_n 中的点(即 E_{n+1} 中最后一个坐标为 0 的点)用字母 q 表示，字母 p 用来表示 E_{n+1}^+ 中的点.

$\mathscr{A}$ 上有 $|u|\leqslant 1$. 此外，由于只需在 S 与由单位立方体组成的网格中之一个立方体的交集上证明定理，所以还可认为 S 含于单位立方体之中.

做了这些简化后，令 $\mathscr{D}=\{\bigcup_{q\in F}\Gamma_\alpha(q)\}\cap\{p(x,y);0<y<1\}$, $\mathscr{B}=\partial\mathscr{D}$ (= $\mathscr{D}$ 的边界)，$\mathscr{D}_j$ 表示将 $\mathscr{A}$ 沿 y 轴方向平移 $-1/j$ 而成的集合，$\mathscr{G}_j=\mathscr{D}_j\cap E_n$. 此外，记 $u_j(x,y)=u(x,y+1/j)$，令 χ_j 表示 $\mathscr{G}_j$ 的特征函数. $\chi_j(x)u_j(x,0)$ 的 Poisson 积分用 $\varphi_j(x,y)$ 表示，且 $\psi_j(x,y)=u_j(x,y)-\varphi_j(x,y)$. 我们看到 $|\varphi_j|\leqslant 1$ (这是根据第一章引理 1.17 之(b)和 Poisson 核的非负性而得到).

函数列 $f_j(s)=\chi_j(s)u_j(s,0)$ 按 $L^2(E_n)$ 范数一致有界 (因为 $\|f_j\|_2\leqslant\|\chi_j\|_2=\left(\int_{\mathscr{G}_j}ds\right)^{1/2}\leqslant$ (边长为 $1+2\alpha/j$ 的立方体体积)$^{1/2}\leqslant(1+2\alpha)^{n/2}$). 那么，存在子序列 $\{f_{j_k}\}$ 弱收敛于函数 $f\in L^2(E_n)$. 特别地，对每个 $(x,y)\in E^+_{n+1}$，当 $k\to\infty$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\varphi_{j_k}(x,y)&=\int_{E_n}f_{j_k}(s)P(x-s,y)\,ds\\
&\to\int_{E_n}f(s)P(x-s,y)\,ds\\
&=\varphi(x,y).
\end{aligned}
$$

由于显然有 $\lim\limits_{j\to\infty}u_j(x,y)=u(x,y)$，故有下述极限的存在：

$$\psi(x,y)=\lim_{k\to\infty}\psi_{j_k}(x,y)=u(x,y)-\varphi(x,y).$$

因为 φ 是 $L^2(E_n)$ 中函数的 Poisson 积分，所以根据定理 3.16，它在 E_n 的几乎所有点处有非切向极限. 而 $u=\varphi+\psi$，故需证明，对几乎一切 $q\in F$，当 p 在 $\Gamma_\alpha(q)$ 内趋向 q 时，$\lim\psi(p)=0$.

为此目的，我们先来考查函数 ψ，它满足：

(1) 当 $p\in\mathscr{D}$ 时，$|\psi_j(p)|\leqslant 2$ (因在 $\mathscr{D}$ 中，$|\psi_j|\leqslant|u_j|+|\varphi_j|\leqslant 1+1=2$).

(2) 当 $p\in\mathscr{D}$，且 $p\to q\in F$ 时，$\psi_j(p)\to 0$ (由定理 3.16 可知，这一事实对 $\mathscr{G}_j$ 的一切内点成立).

现在，倘若能找到一个在 E^+_{n+1} 中调和的函数 w，满足条件

(a) 在 E_{n+1}^+ 中，$w(x, y)\geqslant 0$,

(b) 在 $\mathscr{B}-F$ 中，$w(x, y)\geqslant 2$,

(c) 在 F 的几乎每一点处，w 有非切向极限 0,

我们就能证明定理了．因为此时，由 (1) 和 (b) 知，在 $\mathscr{B}$-F 中，有 $w(p)\pm\psi_j(p)\geqslant 0$．进而由(2)和(a)推出

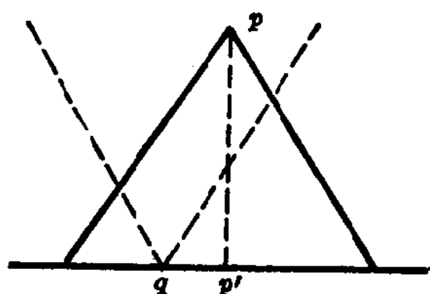
$$\liminf_{p\to q\in F, p\in\mathscr{D}}\{w(p)\pm\psi_j(p)\}\geqslant\liminf_{p\to q\in F, p\in\mathscr{D}} w(p)\geqslant 0.$$

这说明，对一切 $p\in\mathscr{D}$，有 $w(p)\pm\psi_j(p)\geqslant 0$．因为，如若不然，根据最小值原理得知，存在一个当 $k\to\infty$ 时趋向 F 中之一点的序列 $\{p_k\}\subset\mathscr{D}$，使得对每个 k，有 $w(p_k)\pm\psi_j(p_k)<-\varepsilon$，这里 ε 是某个正数．然而由(2)可知，当 $k\to\infty$ 时，$\psi_j(p_k)\to 0$，因而对很大的k，$w(p_k)$ 就是负值，这与 (a) 矛盾．于是令 j 趋向 ∞(通过一个子列)，就得到对一切 $p\in\mathscr{D}$，有 $w(p)\pm\psi(p)\geqslant 0$．即对一切 $p\in\mathscr{D}$，有 $|\psi(p)|\leqslant w(p)$．于是，由性质 (c) 就推出：对几乎一切 $q\in F$，当 p 在 $\Gamma_\alpha(q)$ 内趋向 q 时，$\lim\psi(p)=0$.

现在我们来构造具有性质 (a), (b), (c) 的函数 w．令 ξ 是 E_n-F 的特征函数，并对 $y>0$ 作函数

$$w(x,y)=2y+cy\int_{E_n}\frac{\xi(s)}{(y^2+|x-s|^2)^{(n+1)/2}}ds,$$

其中，c 是一个正常数(在后文中来选取)．显然，在 E_{n+1}^+ 中，$w\geqslant 0$．



而由定理 3.16 可立即推出(c)．那么，我们只需证明w满足 (b)．我们首先注意到，当 $(x,y)\in\mathscr{B}$-F，且 $y=1$ 时，有 $w(x, y)\geqslant 2y=2$．现设 $p=(x, y)\in\mathscr{B}$，且 $0<y<1$．考查以 p 为顶点、以 α 为锥度的倒立锥(如图)．设此锥与超平面 E_n 所交出的球之内部为 C，则 C 与 F 互不相交．因为，否则就会存在一点 $q\in C\cap F$，使 p 在 $\Gamma_\alpha(q)$ 之内部．但因 $p\in\mathscr{B}$，所以这是不可能的．于是有

$$w(p)\geqslant cy\int_C\frac{ds}{(y^2+|x-s|^2)^{(n+1)/2}}$$

$$=c\omega_{n-1}y\int_0^{\alpha y}\frac{r^{n-1}dr}{(y^2+r^2)^{(n+1)/2}}$$

$$=c\omega_{n-1}\int_0^{\alpha}\frac{r^{n-1}dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}.$$

适当选择 c，可使上面最后的表达式大于 2. ▎

既然已经构造出了函数 w，这就证明了：对几乎每一 $q\in F$，当 p 在 $\Gamma_\alpha(q)$ 内趋于 q 时，$\psi(p)$ 的极限为 0. 此外我们还可断言，在 $\bigcup_{q\in F}\Gamma_\alpha(q)$ 上的控制式 $|\psi|\leqslant w$，可推出对几乎一切 $q\in F$，当 p 位于以 q 为顶点、锥度为任意的锥内，只要 p 与 q 充分接近，就有 $|\psi(p)|\leqslant w(p)$. 由简单的几何论证就可说明，F 的每个稠密点[8] q 实际上就是这种情形. 所以，对几乎每个 $q\in F$，当 p 非切向趋于 q 时，$\lim\psi(p)=0$. 这就意味着在 F 的几乎每个点 q 处，u 和 φ 有相同的非切向极限，因而定理得证. ▎

我们的兴趣在于把这一结果推广到在多变量集上的调和函数(称作多重调和函数). 即设 $E_{n_1}\times E_{n_2}\times\cdots\times E_{n_k}$ 为 k 个欧氏空间的笛卡儿积，其中的点为 $(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)})=(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}, \cdots, x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)})$，$\mathscr{D}$ 是笛卡儿积中的一个区域，而多重调和函数指的是，定义在 $\mathscr{D}$ 上的二次可微函数 u，它对每个变量 $x^{(j)}$，$1\leqslant j\leqslant k$，都是调和的，也就是说，对 $1\leqslant j\leqslant k$，有

$$\sum_{i=1}^{n_j}\frac{\partial^2 u}{(\partial x_i^{(j)})^2}=0.$$

下一章将处理多变量解析函数，那时将遇到这种多变量函数. 在那里，每个 E_{n_j} 都是二维的，且可与复平面的拷贝等同.

叙述这一推广是不困难的. 为了证明它而对定理 3.19 的证明作些改变也是不难办到的. 其改变之一类似于定理 2.5 和 3.16 对"累次 Poisson 积分"所作的改变(即关于多重调和函数的变型 Dirichlet 问题的解).

这些累次 Poisson 积分是算子族的范例，它们含有若干个趋

---

8) 设 $\xi_F=\xi$ 是可测集 $F\subset E_n$ 的特征函数. 如果 $\Omega_n^{-1}r^{-n}\int_{|x-t|<r}\xi(t)\,dt\to1(r\to0)$，则称 x 是 F 的稠密点. 依推论 3.14 知，F 的几乎每个点都是稠密点.

于 0 的独立参数，因而比在定理 3.12 中出现的算子族更为一般．即 $\{T_\varepsilon\}$ 族被集 $\{\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)\in E_m: \varepsilon_j>0, j=1, 2, \cdots, m\}$（在 E_m 的第一卦限中）参数化．我们的目的是要研究，当 ε 趋于 $0\in E_m$ 时 T_ε 的性态．为简单起见，对累次 Poisson 积分，我们只考虑 $m=2$ 的情形，即设 E_n 等同于 E_{n_1}、E_{n_2} 的笛卡儿积，其中 $n_1+n_2=n$．对 $t=(t_1, \cdots, t_{n_j})\in E_{n_j}$, $j=1, 2$, 令

$$P_j(t, \varepsilon_j)=c_{n_j}\frac{\varepsilon_j}{(|t|^2+\varepsilon_j^2)^{(n_j+1)/2}}.$$

然后，对 $f\in L^p(E_n)$，定义 $T_\varepsilon f=T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}f$ 如下：

$$(T_\varepsilon f)(x)=\int_{E_{n_1}}P_1(x^{(1)}-t, \varepsilon_1)\times\left\{\int_{E_{n_2}}P_2(x^{(2)}-s, \varepsilon_2)f(t, s)\,ds\right\}dt,$$

其中，

$$x=(x_1^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)})=(x^{(1)}, x^{(2)})\in E_{n_1}\times E_{n_2}=E_n.$$

如果 $f(x)=f_1(x^{(1)})f_2(x^{(2)})$，其中 $f_j\in L^p(E_{n_j})\cap C_0(E_{n_j})$, $j=1, 2$，则根据定理 2.1 知，当 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\to(0, 0)$ 时，$(T_\varepsilon f)(x)$ 一致收敛于 $f(x)$．这种函数 f 的有限线性组合类在 $L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$ 中稠密，于是，若能证明不等式 (3.13) 成立，就能断定 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}(T_\varepsilon f)(x)$ 几乎处处存在并有限．我们不难证明下述更强的结论：对 $(Mf)(x)=\sup\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2>0}|(T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}f)(x)|$, $1<p\leqslant\infty$, 有

$$\|Mf\|_p\leqslant A\|f\|_p, \tag{3.20}$$

此处，A 依赖于 p, n_1, n_2，而与 $f\in L^p(E_n)$ 无关（见前面 (3.7) 的讨论）．为建立这一不等式，定义 $M^{(1)}$ 为 $L^p(E_n)$ 上的一个算子，它把 f 映成 $f(\cdot, x^{(2)})$ 的极大函数，即

$$(M^{(1)}f)(x)=(M^{(1)}f)(x^{(1)}, x^{(2)})=\sup_{r>0}\Omega_{n_1}^{-1}r^{-n_1}\int_{|t|<r}|f(x^{(1)}-t, x^{(2)})|\,dt.$$

类似地，定义

$$(M^{(2)}f)(x)=\sup_{r>0}\Omega_{n_2}^{-1}r^{-n_2}\int_{|s|<r}|f(x^{(1)}, x^{(2)}-s)|\,ds.$$

于是，依定理 3.7，有

$$(3.21)\qquad \|M^{(2)}M^{(1)}f\|_p \leqslant b(p, n_2)\|M^{(1)}f\|_p \leqslant b(p, n_2)b(p, n_1)\|f\|_p = B\|f\|_p.$$

另一方面，从(3.10)推出

$$|(T_\varepsilon f)(x)| = |(T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}f)(x)| \leqslant \int_{E_{n_2}} P_2(x^{(2)}-s, \varepsilon_2)(M^{(1)}f)(x^{(1)}, s)\,ds \leqslant (M^{(2)}M^{(1)}f)(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

因而，$(Mf)(x) = \sup\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2>0}|(T_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}f)(x)| \leqslant (M^{(2)}M^{(1)}f)(x)$，再由(3.21)就得出(3.20).

这样，我们可以断定，对几乎一切 $x\in E_n$，当 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\to(0, 0)$时，$\lim(T_\varepsilon f)(x)$ 存在并有限. 显然，我们可以修改上述证明并用于m重累次 Poisson 积分. 更确切地说，有以下定理：

定理 3.22 若 $f\in L^p(E_n)$，$1<p<\infty$，且

$$u(x, \varepsilon) = u(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) = \int_{E_{n_1}}\cdots\int_{E_{n_m}} P_1(x^{(1)}-t^{(1)}, \varepsilon_1)\cdots P_m(x^{(m)}-t^{(m)}, \varepsilon_m) \times f(t^{(1)}, \cdots, t^{(m)})\,dt^{(1)}\cdots dt^{(m)},$$

其中，$t^{(j)}$，$x^{(j)}$ 皆属于 E_{n_j}，$\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)$ 属于 E_m 的第一卦限(即 $\varepsilon_j>0$, $j=1, 2, \cdots, m$). 则对几乎每一 $x\in E_n$，有

$$\lim_{\varepsilon\to0} u(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\to0} u(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) = f(x).$$

证明 我们已经知道 $\lim\limits_{\varepsilon\to0} u(x, \varepsilon)$ 几乎处处存在并有限. 现在只需证明此极限几乎处处为 $f(x)$. 如同证明推论 3.14 时一样，只需证明当 $\varepsilon\to0$ 时，有 $\|u(\cdot, \varepsilon)-f\|_p\to0$. 而这一点完全可用证明第一章定理 1.18 的同样方法来证明. 为简化符号起见，我们仍对 $m=2$ 给出证明. 其证法显然可以推广到一般情形. 由第一章引理 1.17 之(b)并经变量代换，我们有，

$$u(x,\ \varepsilon)-f(x)$$
$$=\int_{E_{n_1}}\int_{E_{n_2}} P_1(t,\ \varepsilon_1)P_2(s,\ \varepsilon_2)\{f(x^{(1)}-t,\ x^{(2)}-s)-f(x^{(1)},\ x^{(2)})\}\,dt\,ds$$
$$=\int_{E_{n_1}}\int_{E_{n_2}} P_1(t,\ 1)P_2(s,\ 1)\{f(x^{(1)}-\varepsilon_1 t,\ x^{(2)}-\varepsilon_2 s)-f(x^{(1)},\ x^{(2)})\}\,dt\,ds.$$
当 $(h,\ k)\in E_{n_1}\times E_{n_2}$ 时，设
$$\omega_{p,f}(h,\ k)=\omega(h,\ k)=\left(\int_{E_{n_1}}\int_{E_{n_2}} |f(x^{(1)}+h,\ x^{(2)}+k)-f(x^{(1)},\ x^{(2)})|^p\times dx^{(1)}dx^{(2)}\right)^{1/p}$$
是 f 的 L^p 连续模．我们知道，当 $|h|,\ |k|\to 0$ 时，有 $\omega(h,\ k)\to 0$，且 $\omega(h,\ k)\leqslant 2\|f\|_p$. 那么，由 Minkowski 积分不等式和 Lebesgue 控制收敛定理知，当 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\to 0$ 时，
$$\left(\int_{E_n}|u(x,\ \varepsilon)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$
$$=\int_{E_{n_1}}\int_{E_{n_2}}\omega(-\varepsilon_1 t,\ -\varepsilon_2 s)P_1(t,\ 1)P_2(s,\ 1)\,dt\,ds\to 0.$$
定理证毕．】

将上面的证明加以修改，还可证明定理对 $p=\infty$ 也是正确的(其下述的非切向问题也如此)．因为，不论是哪种情况，都是下面定理 3.24 的推论．所以我们不必再述说这些修改了．

定理 3.22 断言，如果使动点沿 $E^+_{n_j+1}$ 中的直线 $x^{(j)}=x^{(j)}_0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的积“向下”逼近 E_n 中之一点 $x_0=(x^{(1)}_0,\ x^{(2)}_0,\ \cdots,\ x^{(m)}_0)$，则 $L^p(E_n)$ 中函数的累次 Poisson 积分几乎处处收敛于该函数(试与本节开始时的讨论作比较)． 如同先前一样，在更广的意义下，其极限也存在．这些极限是非切向极限的推广，它的定义是：设 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，记
$$\Gamma^{(j)}_{\alpha_j}(x^{(j)}_0)=\{(x^{(j)},y_j)\in E^+_{n_j+1};\ |x^{(j)}-x^{(j)}_0|<\alpha_j y_j\},\ j=1,2,\cdots,k.$$
u 是定义在 $E^+_{n_1+1}\times\cdots\times E^+_{n_k+1}$ 上的函数． 如果对一切 k 维正实数

组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，当 $(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2; \cdots; x^{(k)}, y_k)$ 在笛卡儿积 $\Gamma^{(1)}_{\alpha_1} \times \Gamma^{(2)}_{\alpha_2} \times \cdots \times \Gamma^{(k)}_{\alpha_k}$ 内部趋向 $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(k)})$ 时（即每个点 $(x^{(j)}, y_j)$ 非切向趋于 $x_0^{(j)}$ 时，$1 \leqslant j \leqslant k$），$u(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2; \cdots; x^{(k)}, y_k) = u(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}; y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 趋向于 l，则称 u 在 $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(k)})$ 按每个变量组[9]有非切向极限 l. 把不等式(3.17)和用以证明定理 3.22 的论据用到每个核 P_j 上，$1 \leqslant j \leqslant m$，我们得到

推论 3.23 若 $f \in L^p(E_n)$，$1 < p < \infty$，且 $u(x, s)$ 是定理 3.22 中定义的函数，则在几乎一切 $x_0 \in E_n$ 处，$u(x, s)$ 按每个变量组有非切向极限 $f(x_0)$.

设函数 u 定义在 $E^+_{n_1+1} \times E^+_{n_2+1} \times \cdots \times E^+_{n_k+1}$ 上，若对所有 k 重正实数组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$，$u$ 在截锥 $\Gamma_{\alpha_j}(x_0^{(j)}) \cap \{(x^{(j)}, y_j) \in E^+_{n_j+1}; 0 < y_j \leqslant 1\}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 的笛卡儿积内有界，则称 *u 在 $x_0 \in E_n$ 上按每个变量组非切向有界*. 设 u 是函数 $f \in L^p(E_n)$ 的累次 Poisson 积分，$1 < p < \infty$，则结论"在 E_n 中几乎所有的点上，u 按每个变量组非切向有界"是比推论 3.23 更为基本的事实（当然，它是推论3.23 的直接结果）.

与 E^+_{n+1} 上调和函数的情形完全类似，按每个变量组非切向有界性几乎处处等价于非切向极限的存在性，甚至对于不是 Poisson 积分的调和函数也是如此. 更确切地说，定理 3.19 可推广如下：

定理 3.24 设 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，$u$ 是定义在笛卡儿积 $E^+_{n_1+1} \times E^+_{n_2+1} \times \cdots \times E^+_{n_k+1}$ 上的函数，它在每个变量组 $(x^{(j)}, y_j) = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_{n_j}^{(j)}, y_j) \in E^+_{n_j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 中都是调和的（即 u 二次可微，并满足

---

9) 我们将 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组合成 k 个互不相交的集合. 第 j 个集合包含变量 $x_{N_{j-1}+1}, \cdots, x_{N_j}$，此处当 $1 \leqslant l \leqslant k$ 时，$N_l = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$. 我们刚才定义的概念就涉及到这种分组. 严格说来，我们应当在定义中指出这一点. 不过另一方面，我们又将看到，在我们的一切应用中，所讨论的是哪一种分组会是很清楚的. 因此，为简单起见，就不再指出它了.

$$\Delta_j u=\sum_{i=1}^{n_j}\frac{\partial^2 u}{(\partial x_i^{(j)})^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}=0).$$

如果在一个正测度子集 $S\subset E_n$ 的一切点上，u 按每个变量组非切向有界，那么，在 S 的几乎每个点上，u 按每个变量组有非切向极限.

证明 证明这个定理的主要想法是从定理 3.19 的证明引伸出来的．因此为了得到现在的定理，我们仅需指出在原证明中需作的变动．下面仅限于讨论 $k=2$ 且 $n_1=n_2=n$ 的情形(易将证明推广到一般情形).

与定理 3.19 证明中所用的记号类似，令 $p=(p_1, p_2)=(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$ 表示 $E_{n+1}^+\times E_{n+1}^+$ 的点，$q=(q_1, q_2)=(x^{(1)}, 0; x^{(2)}, 0)$ 表示 $E_n\times E_n=E_{2n}$ 的点(后者是 $E_{n+1}^+\times E_{n+1}^+$ 的特异边界[10])．同前理，我们的问题基本上可以归结为去证明：若在区域

$$\mathscr{A}=\{\bigcup_{(q_1,q_2)\in F}\gamma_\alpha(q_1, q_2)\}$$
$$\cap\{p=(x^{(1)}, y_1;\ x^{(2)}, y_2);0<y_1,y_2<2\}$$

中，有 $|u|\leqslant 1$，则对几乎所有 $q\in F\subset E_{2n}$，当 p 在 $\gamma_\alpha(q)=\gamma_\alpha(q_1, q_2)$ 内部趋向 $q=(q_1, q_2)$ 时，$u(p)$ 有极限．这里，我们把笛卡儿积 $\Gamma_{\alpha_1}(q_1)\times\Gamma_{\alpha_2}(q_2)$ 记作 $\gamma_\alpha(q_1, q_2)$．在适当选取子集时，还可认为 F 是闭的，并且含于 E_{2n} 的单位球之中．令

$$\mathscr{D}=\{\bigcup_{q\in F}\gamma_\alpha(q)\}\cap\{p=(x^{(1)},y_1;x^{(2)},y_2);0<y_1,y_2<1\},$$

$\mathscr{A}_j$ 表示 $\mathscr{D}$ 沿 y_1 轴和 y_2 轴方向平移 $-1/j$ 而得的集，$\mathscr{G}_j=\mathscr{A}_j\cap E_{2n}$．此外，令 $u_j(p)=u(x^{(1)}, y_1+1/j;\ x^{(2)}, y_2+1/j)$，$\chi_j$ 表示 $\mathscr{G}_j$ 的特征函数，φ_j 表示 $\chi_j(x^{(1)};x^{(2)})u_j(x^{(1)}, 0;x^{(2)},0)$ 的累次 Poisson 积分，$\psi_j=u_j-\varphi_j$.

如同证明定理 3.19 一样，我们可以找到一个序列 $\{\varphi_{j_n}\}$，它在 $E_{n_1+1}^+\times E_{n_2+1}^+$ 的每个点上收敛于 ($L^2(E_{2n})$ 中一个函数的) 累次 Poisson 积分．我们记该极限为 φ．因为当 $j\to\infty$ 时，$u_j\to u$，所以

10) "特异边界"这一术语经常在文献中使用，它表示我们考虑的只是 $E_{n+1}^+\times E_{n+1}^+$ 拓扑边界的一部分。

对每个 $p\in E_{n+1}^{+}\times E_{n+1}^{+}$，$\psi_{j_k}(p)=u_{j_k}(p)-\varphi_{j_k}(p)$ 趋于极限 $\psi(p)=u(p)-\varphi(p)$. 由于 φ 是 $L^2(E_{2n})$ 中一个函数的 Poisson 积分，依推论 3.23, 它在 E_{2n} 的几乎每个点上，按每个变量组有非切向极限. 我们将证明,对几乎一切 $q\in F$,当 p 在 $\gamma_\alpha(q)$ 内趋向 q 时，有 $\lim\psi(p)=0$.

与证明定理 3.19 时一样，关键在于构造一个 $E_{n+1}^{+}\times E_{n+1}^{+}$ 中的多重调和函数 w,它满足条件:

(a) 在 $E_{n+1}^{+}\times E_{n+1}^{+}$ 内,$w\geqslant 0$,

(b) $\liminf\limits_{p'\to p,p\in\mathscr{D}} w(p')\geqslant|\psi_j(p)|$, $j=1, 2, \cdots$,此处，p 是 $\mathscr{D}$ 的边界点.

(c) 在 F 的几乎每个点上，w 按每个变量组以 0 为非切向极限.

设 ξ 是 E_{2n}-F 之包含于以原点为心，半径充分大的(固定的)球(在证明过程中，不难确定它至少要多大)中的那个部分的特征函数. 我们定义 $w=2(y_1+y_2)+c\mathrm{W}(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$, 其中 W 是 ξ 的累次 Poisson 积分,c 是一个正常数,它将在后文中取定.

条件(a)是显然的,而条件 (c) 可由推论 3.23 推出(因 ξ 属于所有 $L^p(E_{2n})$ 空间,$1<p<\infty$). 那么只需证明 (b). 但因对 $p\in F$,有 $\psi_j(p)=0$,所以不等式(b)对 $p\in F$ 成立. 对 $\mathscr{D}$ 之边界的其余部分,我们分别考虑:

(i) y_1 或 y_2 是 1 的点;

(ii) $0<y_1<1$ 且 $0<y_2<1$ 的点;

(iii) $y_1>0$ 且 $y_2=0$,或 $y_2>0$ 且 $y_1=0$ 的点.

由于 $|\psi_j|\leqslant 2$,所以对 (i) 的情形,(b) 显然成立.

设 $p=(p_1, p_2)=(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$ 满足 (ii). 考虑以 p_1, p_2 为顶点，α_1, α_2 为锥度的倒立锥的笛卡儿积. 这两个锥交超平面 $y_1=0$ 和 $y_2=0$(在每个 E_{n+1}^{+} 中)为两个开球 C_1 和 C_2. 我们说,$C_1\times C_2$ 不包含 F 的点(否则，p 就会属于 $\mathscr{D}$). 若我们当初用来定义 ξ 的包含 F 的球选得足够大，使它能包含这些笛卡儿积，那

么，在 $C_1\times C_2$ 的所有点上，$\xi=1$. 因为球 C_1 和 C_2 分别以 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 为心，$\alpha_1 y_1$ 和 $\alpha_2 y_2$ 为半径，所以当 c 足够大时，有

$$w(p)\geqslant cW(p)\geqslant c\prod_{j=1}^{2}\left(c_n y_j\int_{C_j}\frac{ds^{(j)}}{(y_j^2+|x^{(j)}-s^{(j)}|^2)^{(n+1)/2}}\right)$$

$$=c\prod_{j=1}^{2}\left(y_j c_n\omega_{n-1}\int_0^{\alpha_j y_j}\frac{r^{n-1}dr}{(y_j^2+r^2)^{(n+1)/2}}\right)\geqslant 2.$$

现设 $p=(p_1, p_2)=(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, 0)$ 满足 (iii) ($y_1=0$, $y_2>0$ 的情形类似)，此时，$w(p)$ 没定义，故需估算当 $p'\in\mathscr{D}$ 逼近 p 时，$\liminf w(p')$ 的值. 设 $p'=(p'_1, p'_2)$，且 y'_1 和 y'_2 分别为 p'_1 和 p'_2 的 y 坐标，我们有

$$w(p')\geqslant 2y'_1+cc_n^2\int_{E_n}\frac{y'_1}{|p'_1-q_1|^{(n+1)/2}}$$

$$\times\left\{\int_{E_n}\frac{y'_2}{|p'_2-q_2|^{(n+1)/2}}\xi(q_1, q_2)\,dq_2\right\}dq_1.$$

根据 Fatou 引理，得出

$$\liminf_{p'\to p,\, p'\in\mathscr{D}} w(p')$$

$$\geqslant 2y_1+cc_n^2\int_{E_n}\frac{y_1}{|p_1-q_1|^{(n+1)/2}}$$

$$\times\left\{\liminf_{p'_2\to p_2} c_n\int_{E_n}\frac{y'_2}{|p'_2-q_2|^{(n+1)/2}}\xi(q_1, q_2)\,dq_2\right\}dq_1.$$

现在来证明

(3.25)

$$\liminf_{p'_2\to p_2} c_n\int_{En}\frac{y'_2}{|p'_2-q_2|^{(n+1)/2}}\xi(q_1, q_2)\,dq_2\geqslant\xi(q_1, p_2).$$

为此，首先注意到由于左端的被积函数是非负的，所以当 $\xi(q_1, p_2)=0$ 时，不等式肯定成立。而 ξ 在由 E_{2n} 中一开球与 E_m-F 所交而成的开集上的其他值只能是 1. 因为这是开集，故 ξ 在其上连续. 因而积分 (3.25) 实际上收敛于 $\xi(q, p_2)$ (可用证明定理 2.1(b)之最后部分的同样论据来证明). 于是(3.25)获证，因而有

$$\liminf_{p'\to p,\, p'\in\mathscr{D}} w(p')\geqslant 2y_1+cc_n\int_{E_n}\frac{y_1}{|p_1-q_1|^{(n+1)/2}}\xi(q_1, p_2)\,dq_1.$$

余下的证明，基本上是重复定理 3.19 证明中的最后部分，并

把它用于区域 $\mathscr{D}_{p_2}$ 上的函数 $\psi_j(\bar{p}_1, p_2)$ 和

$$v(\bar{p}_1)=2y_1+c\omega_n\int_{E_n}\frac{y_1}{|\bar{p}_1-q_1|^{(n+1)/2}}\xi(q_1, p_2)\,dq_1$$

上，其中，$\mathscr{D}_{p_2}$ 是由含在某一截锥 $\Gamma_\alpha(q_1)((q_1, p_2)\in F)$ 中的点 $\bar{p}_1\in E^+_{n+1}$ 组成(这时，p_2 是固定点，它位于 E^+_{n+1} 的边界 E_n 上). 这样就证明了(b)，并得到控制式

(3.26) $$|\psi(p)|\leqslant w(p),\ p\in\mathscr{D}.$$

为了完成定理的证明，我们尚需扩充(3.26)，使之对于几乎一切 $q\in F$，以及任意锥度 β_1, β_2 的积锥 $\Gamma_{\beta_1}(q_1)\times\Gamma_{\beta_2}(q_2)$ 中之 p，只要 p 充分接近于 $q=(q_1, q_2)$，就有 $|\psi(p)|\leqslant w(p)$. 实际上就是要求对 F 的一切强密点，上述控制式成立. 强密点是指满足下述引理结论的点:

引理 3.27 设 ξ 是 $E_{2n}=E_n\times E_n$ 中任一可测子集 F 的特征函数. 则对几乎每个 $x=(x^{(1)}, x^{(2)})\in F$，有

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\Omega_n^{-2}h_1^{-n}h_2^{-n}\iint\limits_{|s^{(1)}|<h_1,|s^{(2)}|<h_2}\xi(x^{(1)}-s^{(1)}, x^{(2)}-s^{(2)})\,ds^{(1)}ds^{(2)}=1.$$

证明 对任一 $f\in L^p(E_n\times E_n)$，定义强极大函数 μ_f:

$$\mu_f(x^{(1)}, x^{(2)})=\sup_{h_1>0,h_2>0}\Omega_n^{-2}h_1^{-n}h_2^{-n}\times\iint\limits_{|s^{(1)}|<h_1,|s^{(2)}|<h_2}|f(x^{(1)}-s^{(1)}, x^{(2)}-s^{(2)})|\,ds^{(1)}ds^{(2)}.$$

如同证明定理 3.22 一样，可知 $\mu_f(x)\leqslant(M^{(2)}M^{(1)}f)(x)$. 所以

(3.28) $$\|\mu_f(x)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\ 1<p<\infty.$$

那么，根据证明定理 3.22 的同样理由，可推出，对任一固定的 $f\in L^p(E_{2n})$, $1<p<\infty$，在几乎每个点 $(x^{(1)}, x^{(2)})\in E_{2n}$ 上，有

(3.29)

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\Omega_n^{-2}h_1^{-n}h_2^{-n}\times\iint\limits_{|s^{(1)}|<h_1,|s^{(2)}|<h_2}f(x^{(1)}-s^{(1)}, x^{(2)}-s^{(2)})\,ds^{(1)}ds^{(2)}$$

$=f(x^{(1)}, x^{(2)}).$

然而，由于 (3.29) 的成立仅依赖于在点 $(x^{(1)}, x^{(2)})$ 的邻域中 f 之值，因此，当 f 只是局部属于 $L^p(E_n)$, $1<p<\infty$ 时，(3.29) 也几乎处处成立．于是，它对一切有界函数——特别是 ξ ——成立．这就证明了引理 3.27．】

现在，我们可以来完成定理 3.24 的证明了．设 (q_1, q_2) 是 F 的强密点．对固定的 $y_1, y_2>0$，考虑集合：

$$A=\{(x^{(1)}, x^{(2)}): |x^{(1)}-q_1|<\beta_1 y_1,\ |x^{(2)}-q_2|<\beta_2 y_2\}.$$

再对任意 $(x^{(1)}, x^{(2)})\in A$，考虑集合：

$$B=\{(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}); |x^{(1)}-\bar{x}^{(1)}|<\alpha_1 y_1,\ |x^{(2)}-\bar{x}^{(2)}|<\alpha_2 y_2\}.$$

若 y_1 和 y_2 充分小，则 B 必与 F 相交，否则就会与 $q=(q_1, q_2)$ 是 F 的强密点这一点相矛盾．因此．若 $p=(p_1, p_2)$, $p_1=(x^{(1)}, y_1)$, $p_2=(x^{(2)}, y_2)$，且 p 充分接近于 q，则 $p\in\Gamma_{\beta_1}(q_1)\times\Gamma_{\beta_2}(q_2)$ 蕴含 $p\in\Gamma_{\alpha_1}(\bar{x}^{(1)})\times\Gamma_{\alpha_2}(\bar{x}^{(2)})$，其中 $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})\in F$.

于是，对一切 $p\in\Gamma_{\beta_1}(q_1)\times\Gamma_{\beta_2}(q_2)$，当 p 充分接近于 $q=(q_1, q_2)$ 时，估计式 (3.26) 也成立．因之，ψ 的非切向极限问题获证．】

§4　次调和函数以及用调和函数的控制

在以后几章中，我们需要用适当的调和函数从上面控制那些形如 $|F|^p$ 的函数，其中，F 或是多复变量全纯函数(见第三章)，或是其分量为调和函数的向量值函数(见第六章)．这些函数 $|F|^p$ 将是次调和函数．我们可以叙述一下次调和函数的性质，并用单实变函数的情形对这种控制作一通俗的说明．此时，调和函数是线性函数，而且正如就会明显地看到的那样，次调和函数是凸函数．凸函数一般是指定义在实轴的一个区间上的连续函数[11] φ，当区间 $[x, y]$ 含于 φ 的定义域中时，满足

11) 可以证明，在一维情形只假设函数可测就够了．次调和函数的一般理论也可以对上半连续的函数建立．虽然在某些应用中，这是重要的，然而在我们这里只对连续函数用到它．所以，我们仅限于讨论那些(技术上)较简单的情况．

$$(4.1) \qquad \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.$$

容易证明，这个条件等价于：若区间 $[x, y]$ 包含在 φ 的定义域中，则在端点 x, y 处与 φ 值相同的线性(调和)函数，在区间 $[x, y]$ 上控制着[12] φ. 当凸函数 φ 在定义域 D 的每个点处有连续二阶偏导数时，(4.1)等价于：对一切 $x\in D$, $\varphi''(x)\geqslant 0$.

在本节的前一部分，我们推广上述这些事实，并处理有界区域上的函数，在后一部分(以后几章也一样)，我们将考虑在讨论中自然地提出的某些无界域上的问题.

一个定义在区域 $\mathscr{D}\subset E_n$ 上的连续函数 s, 如果当球 $\{x\in E_n; |x-x_0|\leqslant r\}$ 含于 $\mathscr{D}$ 中时，有

$$(4.2) \qquad s(x_0)\leqslant \mathscr{M}_{x_0, s}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma_{n-1}} s(x_0+rt')\,dt',$$

则称为是次调和的. 这一不等式显然推广了(4.1).

非负二阶导数蕴含凸性这一事实，也可推广到 n 维：

定理 4.3 设 s 在区域 $\mathscr{D}$ 中有连续二阶偏导数，且对一切 $x\in\mathscr{D}$, 有 $(\Delta s)(x)\geqslant 0$. 则 s 在 $\mathscr{D}$ 的一切点上满足平均值不等式(4.2).

证明 设以 x_0 为心、r_0 为半径的闭球含于 $\mathscr{D}$ 中，令 Σ_ε, Σ_r, $0<\varepsilon<r\leqslant r_0$, 表示以 x_0 为心，半径分别为 ε, r 的球面. 在 Σ_ε 和 Σ_r 之间的球壳区域 S 中，对函数 s 和

$$v(x)=\begin{cases}|x-x_0|^{-(n-2)}-r^{-(n-2)}, & \text{当 } n>2,\\ -\log|x-x_0|+\log r, & \text{当 } n=2\end{cases}$$

应用 Green 定理，可得到(由于在 S 中 $\Delta v=0$, $\Delta s\geqslant 0$)

$$0\geqslant\iint\limits_{S}(s\Delta v-v\Delta s)\,dx=\int_{\partial S}\left(s\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial s}{\partial n}\right)d\sigma,$$

其中，∂S 是 S 的边界，$\partial/\partial n$ 表示在 ∂S 的外法线方向上的导数，$d\sigma$ 是 ∂S 上的面积元. 于是，如同证明定理 1.1 一样，有

---

12) 如果两个实值函数 f 和 g 有相同的定义域 D, 且对一切 $x\in D$, 有 $f(x)\geqslant g(x)$, 我们就说，函数 f 控制函数 g.

$$0\geqslant\left(\int_{\Sigma_r}+\int_{\Sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial v}{\partial n}\,s\,d\sigma-\left(\int_{\Sigma_r}+\int_{\Sigma_\varepsilon}\right)v\,\frac{\partial s}{\partial n}\,d\sigma.$$

但 v 在 Σ_r 上为 0, 且 $\int_{\Sigma_\varepsilon}(\partial s/\partial n)\,v\,d\sigma\leqslant 0$ (这里 $\partial/\partial n$ 是沿 Σ_ε 的指向球心的内法线方向的导数. 从而, 在闭域 $\{x;\,|x-x_0|\leqslant\varepsilon\}$ 上, 对函数 s 和 1 应用 Green 定理, 可知 $\int_{\Sigma_\varepsilon}\partial s/\partial n\,d\sigma\leqslant 0$, 而且, 当 $\varepsilon\leqslant r$ 时, 在 Σ_ε 上, 有 $v\geqslant 0$). 因此, 在 $n>2$ 时, 有

$$0\geqslant\left(\int_{\Sigma_r}-\int_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-(n-2)\,|x-x_0|^{-(n-1)}s(x))\,d\sigma(x).$$

而在 $n=2$ 时, 有

$$0\geqslant\left(\int_{\Sigma_r}-\int_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-|x-x_0|^{-1}s(x))\,d\sigma(x).$$

不论哪种情形, 都有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Sigma_\varepsilon}s(x)\,d\sigma(x)&\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Sigma_r}s(x)\,d\sigma(x)\\&=\mathscr{M}_{x_0,s}(r).\end{aligned}$$

现令 $\varepsilon\to 0$, 则左端趋向 $s(x_0)$, 于是不等式(4.2)成立. 】

在后面几章中, 我们将要指出某些函数是次调和的. 一般说来, 它们不是二次可微的. 所以, 定理 4.3 不能用来建立所需要的次调和性. 但如果对"$\Delta s\geqslant 0$"做适当的解释(在广义函数意义下), 则定理 4.3 对所有连续函数 s 仍然成立. 进一步的具体内容见后文 (5.8). 然而, 对我们的目的来说, 定理 4.3 的下述特殊变型是很有用的.

定理 4.4 设 $s\geqslant 0$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的连续函数, 在子集 $\mathscr{R}=\{x\in\mathscr{D};\,s(x)>0\}$ 上有连续的二阶偏导数, 且在 $\mathscr{R}$ 上满足 $\Delta s\geqslant 0$. 那么 s 是 $\mathscr{D}$ 上的次调和函数.

证明 我们必须证明 s 满足平均值不等式 (4.2). 于是, 设 $x_0\in\mathscr{D}$, 并设闭球 $S_r=\{x;\,|x-x_0|\leqslant r\}$ 含于 $\mathscr{D}$ 中. 对闭区域 S_r, 设 u 是以 $s(x)\,(x\in\partial S_r=\{t;\,|t-x_0|=r\})$ 为边界值的 Dirichlet 问题的解(见推论 1.11). 若能证明对 $x\in S_r$, 有 $s(x)\leqslant u(x)$, 则

不等式(4.2)就是平均值性质(定理 1.1)的推论:

$$s(x_0)\leqslant u(x_0)=\mathscr{M}_{x_0,u}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma u(x_0+rt')\,dt'$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma s(x_0+rt')\,dt'.$$

反之,假设 $\sup\limits_{x\in S_r}\{s(x)-u(x)\}=c>0$. 令 $F=\{x\in S_r;\ s(x)-u(x)=c\}$, F 显然是闭集,且含于 S_r 之内部. 另一方面,在 F 的每个点上,有 $s(x)>0$(因 $u\geqslant 0$). 所以,在 $\mathscr{R}$ 上可对函数 $s-u$ 应用定理 4.3,得知,对每个 $x\in F(\subset\mathscr{R})$,当 ρ 足够小时,有

$$c=s(x)-u(x)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma\{s(x+\rho t')-u(x+\rho t')\}\,dt'.$$

又因在 S_r 上有 $s-u\leqslant c$, x 又是 S_r 之内点,所以由 $s-u$ 的连续性推出,对所有 $t'\in\Sigma$ 及充分小的 ρ, $s(x+\rho t')-u(x+\rho t')=c$. 于是 F 又是开集. 因 S_r 是单连通的,所以 F 或是空集或是 $F=S_r$. 但我们已经知道 S_r 的边界与 F 不相交,因此 F 必是空集. 这表明对一切 $x\in S_r$,有 $s(x)\leqslant u(x)$. 定理得证. 】

值得注意的是,我们实际上已经证明了下述更一般的结果:

定理 4.4′ 设 $s\geqslant 0$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的连续函数,且在 $\mathscr{R}=\{x\in\mathscr{D};\ s(x)>0\}$ 上是次调和的. 那么 s 在 $\mathscr{D}$ 上是次调和的.

一般来说,定理 4.4 证明中的最后部分也适用于任意有界域上的次调和函数. 更确切地说,就是有以下定理(它说明用"次调和"一词的原由).

定理 4.5 设 s 在一有界区域 $\mathscr{D}$ 的闭包上连续. 若 s 在 $\mathscr{D}$ 上次调和,而 u 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续,在 $\mathscr{D}$ 内调和,且对一切 $x\in\partial\mathscr{D}=\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$,有 $s(x)\leqslant u(x)$,则对一切 $x\in\overline{\mathscr{D}}$,有 $s(x)\leqslant u(x)$.

证明 考虑函数 $s-u$. 若对某些 $x\in\mathscr{D}$, $s(x)-u(x)>0$, 则令 $c=\sup\limits_{x\in\overline{\mathscr{D}}}\{s(x)-u(x)\}>1$, $F=\{x\in\overline{\mathscr{D}};\ s(x)-u(x)=c\}$ (因 $\overline{\mathscr{D}}$ 紧,故 $c<\infty$). 那么, F 显然是闭集. 另一方面,调和函数 $-u$ 满足平均值性质,所以,当 $x\in F$,且球 $\{t;\ |t-x|\leqslant\rho\}$ 含于 $\mathscr{D}$ 中时,有

$$c=s(x)-u(x)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma}\{s(x+\rho t')-u(x+\rho t')\}\,dt'.$$

如同前面的证明一样，可以断定 F 是开集．从而 F 必为空集(因 $\overline{\mathscr{D}}$ 连通，且 $x\in\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$ 时，$s(x)-u(x)\leqslant 0<c$)．于是，对一切 $x\in\overline{\mathscr{D}}$，$s(x)-u(x)\leqslant 0$．】

下面，在对次调和函数进一步作简短研究以前，有必要先介绍几个例子．

(1) 调和函数显然是次调和的．而且，从定义立即可知，若 u 调和，则 $|u|$ 为次调和的．

(2) 若 s 是次调和的，φ 是一个非降凸函数，它定义在包含 s 值域的一个区间上，则复合函数 $\varphi\circ s$ 是次调和的．对(4.2)右端应用 Jensen不等式[13]，就得到：

$$\varphi(s(x_0))\leqslant\varphi\left(\int_{\Sigma}s(x_0+rt')\,dt'/\omega_{n-1}\right)$$

$$\leqslant\int_{\Sigma}\varphi(s(x_0+rt'))\,dt'/\omega_{n-1}.$$

因为当 $p\geqslant 1$ 时，$\varphi(x)=x^p$ 对 $x\geqslant 0$ 是凸函数，以上结果，结合例(1)可知，当 u 次调和时，$|u|^p$ 也是次调和的．

(3) 若 u 是调和函数，一般来说，在 $p<1$ 时，$|u|^p$ 不是次调和的．例如，对 $(x,y)\in E_2$，设 $u=u(x,y)=x$，则 u 是调和函数，但 $|u|$ 的小于 1 的幂都不是次调和的．然而在二维情形中，当我们同时考虑调和函数和调和共轭函数[14]时，有一个比在例(2)末尾所述要强得多的结果．具体地说，若 $F=u+iv$ 是一个解析函数，

13) Jensen 不等式的一种形式是：设 μ 是空间 M 上的有限测度，f 是 μ 可积函数，φ 是一凸函数，且其定义域包含 f 的值域．那么，

$$(*)\qquad \varphi\left(\int_M f(t)\,d\mu(t)/\mu(M)\right)\leqslant\int_M\varphi(f(y))\,d\mu(t)/\mu(M).$$

如果 M 是区间 $[x,y]$，$\mu(\{x\})=1=\mu(\{y\})$，而对不含 x 和 y 的 Borel 集 E 有 $\mu(E)=0$，且 f 是恒等函数 $f(t)=t$，$x\leqslant t\leqslant y$，于是不等式(*)就成了凸函数的定义(4.1)．不难从(4.1)经过简单的极限手续得到(*)．

14) 若 u 是域 $\mathscr{R}\subset E_2$ 上的调和函数，则使得 $F=u+iv$ 为 $\mathscr{R}$ 上的解析函数的调和函数 v，就叫做 u 的调和共轭函数．对此有一基本事实：若 $\mathscr{R}$ 单连通，则调和共轭函数存在且唯一(最多加上一个常数)．特别地，在区域 $\mathscr{R}$ 内，在 u 在其上调和的每个点的邻域中，u 的调和共轭函数存在．

则 $|F|^p$ 对一切 $p>0$ 是次调和的．此事可证明如下：设 $\mathscr{R}$ 是 F 的定义域中使 $F(z)\neq 0$ 的点 $x+iy=z$ 所组成的点集．那么，$s=\log|F|$ 在 $\mathscr{R}$ 上调和，当然更是次调和．由于当 $p>0$ 时，$\varphi(x)=e^{px}$ 是一凸函数，因此复合函数 $\varphi\circ s=|F|^p$ 在 $\mathscr{R}$ 上次调和．再由定理 4.4′，就推知 $|F|^p$ 在 F 的定义域上是次调和的．

(4) 若 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 在区域 $\mathscr{D}$ 上是次调和的，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 都是非负实数，则线性组合 $\alpha_1 s_1+\alpha_2 s_2+\cdots+\alpha_k s_k$ 是 $\mathscr{D}$ 上的次调和函数．类似地，若 s_1, s_2 在 $\mathscr{D}$ 上次调和，则 $s(x)=\max\limits_{x\in\mathscr{D}}\{s_1(x), s_2(x)\}$ 定义了 $\mathscr{D}$ 上一个次调和函数．

如果一个调和函数 u 在一区域上控制函数 s，则称 u 是 s 的一个调和控制函数．若对 s 的任一调和控制函数 h，有 $u\leqslant h$，则称 u 是 s 的最小调和控制函数．定理 4.5 告诉我们，在 s 在有界域 $\mathscr{D}$ 上次调和，并在 $\mathscr{D}$ 的闭包 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续的情况下，如果调和函数 u 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上有连续扩张，且在 $\partial\mathscr{D}$ 上控制 s，则 u 是 s 在 $\mathscr{D}$ 上的调和控制函数．此外，若对 $\mathscr{D}$，Dirichlet 问题有解，则由此立即可知，s 的最小调和控制函数是在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续、在 $\mathscr{D}$ 中调和、并在 $\partial\mathscr{D}=\overline{\mathscr{D}}-\mathscr{D}$ 上等于 s 的函数．最后，我们对上半空间上的次调和函数证明一个有关事实，它将和定理 3.19 或定理 3.24 一起，用来得出某些调和函数边界值的存在性（见第三、六章）．

定理 4.6 设 s 是 E_{n+1}^{+} 上非负次调和函数，且对所有 $y>0$，满足

$$\int_{E_n}[s(x, y)]^q\,dx\leqslant c^q<\infty, \tag{4.7}$$

其中，$1\leqslant q<\infty$，c 不依赖于 $y>0$．则 s 在 E_{n+1}^{+} 上有最小调和控制函数．此外，当 $q>1$ 时，这个控制函数就是某个函数 $f\in L^q(E_n)$（具有 $\|f\|_q\leqslant c$）的 Poisson 积分；而当 $q=1$ 时，该控制函数就是 E_n 上一个有限 Borel 测度（其全测度不超过 c）的 Poisson-Stieltjes 积分．

证明 首先看到，s 满足引理 2.6 除调和性以外的假定．但该引理的证明只依赖于不等式(4.2)，而并不依靠调和函数平均值

性质的威力. 因此, 存在常数 $A=A_{n,p}>0$, 使得

(4.8) $$\|s(\cdot,\ y)\|_\infty=\sup_{x\in E_n}|s(x,\ y)|\leqslant Acy^{-n/q}.$$

其次, 我们将证明, 对每个本征子半空间 $E^+_{n+1,y_0}=\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ y\geqslant y_0>0\}$, s 属于 C_0 类 (E^+_{n+1,y_0}). 就是说, 假定 $y\geqslant y_0$, 则有

(4.9) $$\lim_{|x|^2+y^2\to\infty}s(x,\ y)=0.$$

我们从(4.8)看到, 当 y 值大时, $s(x,\ y)$ 的值就小. 于是, 只需证明当 y 位于 y_0 与一固定的 $y_1(>y_0)$ 之间, 以及 $|x|\to\infty$ 时, 有 $s(x,\ y)$ 趋于 0 即可. 我们固定正数 $r<y_0$, 且记 $B=\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ y_0-r<y<y_1+r\}(\subset E^+_{n+1})$, 则

$$\int_B[s(x,\ y)]^q\,dx\,dy=\int_{y_0-r}^{y_0+r}\int_{E_n}[s(x,\ y)]^q\,dx\,dy$$
$$\leqslant(y_1+2r-y_0)c^q<\infty.$$

因而, 若设 $B_k=B\cap\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ |x|\geqslant k\}$, 便有

(4.10) $$\lim_{k\to\infty}\int_{B_k}[s(x,\ y)]^q\,dx\,dy=0.$$

当 $|x|\geqslant m$, 且 $y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 时, 我们可找到一个含于集合 B_{m-r} 中的以点 $(x,\ y)$ 为心、r 为半径的球(体) S. 由于 $\varphi(t)=t^q$ 是非降凸函数, 则 $\varphi\circ s=s^q$ 也是次调和的(见上例 (2)), 所以

$$[s(x,\ y)]^q\leqslant\frac{1}{|S|}\int_S[s(\xi,\eta)]^q\,d\xi\,d\eta$$
$$\leqslant\frac{1}{|S|}\int_{B_{m-r}}[s(\xi,\ \eta)]^q\,d\xi\,d\eta\ ^{15)}.$$

但由(4.10)可知, 当 $k=m-r$ 趋于 ∞ 时, 上面最后一个式子趋于 0. 因此(4.9)得证.

为了构造所要的调和控制函数, 我们对每个 $\varepsilon>0$ 和 $y>0$, 定义

---

15) 不等式(4.2)断言, s 在以 x_0 为心、以 r 为半径的球面上的平均值控制 $s(x_0)$. 与证明引理 2.6 类似, 可证在以 x_0 为心、以 r 为半径的球体上, s 的平均值也控制 $s(x_0)$. 把这一事实应用到 s^q 上(在 $(x,\ y)$ 点), 就是这里的不等式.

$$m_\varepsilon(x, y)=\int_{E_n} s(x-t, \varepsilon)P(t, y)\,dt$$
$$=\int_{E_n} s(t, \varepsilon)P(x-t, y)\,dt.$$

那么，根据不等式(2.2)，对所有 $\varepsilon>0$ 和 $y>0$，有

$$\int_{E_n} [m_\varepsilon(x, y)]^q\,dx\leqslant c^q. \tag{4.11}$$

并且，从(4.9)和定理2.1之(b)得知

$$0=\lim_{y\to 0}\|s(\cdot, \varepsilon)-m_\varepsilon(\cdot, y)\|_\infty$$
$$=\lim_{y\to 0}\{\sup_{x\in E_n}|s(x, \varepsilon)-m_\varepsilon(x, y)|\}.$$

由此可断言，当 δ 是一个正数时，必存在一个充分小的 $y_0>0$，使对一切 $x\in E_n$，有 $s(x, \varepsilon+y_0)-m_\varepsilon(x, y_0)<\delta$. 再由(4.9)看出，若 $|x|$ 或 y 很大，比如说 $|x|\geqslant k$，或 $y\geqslant y_1$，就有 $s(x, \varepsilon+y)-m_\varepsilon(x, y)<\delta$. 于是，不等式

$$s(x, \varepsilon+y)-m_\varepsilon(x, y)<\delta$$

在区域 $R=\{(x, y)\in E_{n+1}^+;\ |x|\leqslant k,\ y_0\leqslant y\leqslant y_1\}$ 的边界上成立. 我们检查一下调和函数极大值性质的证明过程就可知道，它只用到了平均值不等式(4.2). 因此，次调和函数也满足极大值性质. 现在把它用到次调和函数 $s(x, \varepsilon+y)-m_\varepsilon(x, y)$ ($-m$ 调和，因而次调和)和区域 R 上，我们看到前述不等式在整个 R 上成立. 令 $\delta\to 0$，相应地令 k, $y_1\to\infty$, $y_0\to 0$，就得出对一切 $(x, y)\in E_{n+1}^+$，有

$$s(x, \varepsilon+y)\leqslant m_\varepsilon(x, y). \tag{4.12}$$

采用证明定理2.5的同样办法(用 s 代替 u，用 q 代替 p)，可知，当 $q>1$ 时，我们能找到一个零序列 $\{\varepsilon_k\}$ 和一个 L^q 中的函数 f，使得

$$\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y)=\lim_{k\to\infty}\int_{E_n} s(t, \varepsilon_k)P(x-t, y)\,dt$$
$$=\int_{E_n} f(t)P(x-t, y)\,dt$$
$$=m(x, y)$$

而当 $q=1$ 时，代替 f 而存在一个有限 Borel 测度 μ，使得

$$\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y) = \lim_{k\to\infty}\int_{E_n} s(t, \varepsilon_k)P(x-t, y)\,dt$$
$$=\int_{E_n} P(x-t, y)\,d\mu(t)$$
$$=m(x, y).$$

所以，无论哪种情形，在不等式(4.12)中，令 $\varepsilon=\varepsilon_k$ 趋向 0，都有

$$s(x, y)\leqslant m(x, y).$$

函数 m 就是所要的 Poisson 积分(或 Poisson-Stieltjes 积分)．再因 $m_\varepsilon(x, y)$ 是 $s(x, \varepsilon+y)$ 的最小调和控制函数：对任一 s 的调和控制函数 h，满足

$$m(x, y)=\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y)\leqslant\lim_{k\to\infty} h(x, \varepsilon_k+y)$$
$$=h(x, y).$$

所以，$m(x, y)$ 是 s 的最小调和控制函数．】

§5 进一步的结果

5.1 本章开始时，我们引进了函数 u 在以 x 为心、以 r 为半径的球面 $S_r(x)$ 上的平均值 $\mathscr{M}_{x,u}(r)=\mathscr{M}(r)$．在 $S_r(x)$ 的球体上做函数 u 的平均值

$$\mathscr{A}_{x,u}(r)=\mathscr{A}(r)=\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r} u(x+t)\,dt$$

也是很自然的．因此，我们可以考虑两个不同的平均值性质：一个是本章开始时介绍的，类似的一个是关于 $\mathscr{A}(r)$ 的．引理 2.6 之证明的开始部分说明，如果函数满足前一个平均值性质，则一定满足第二个．类似地，犹如在定理 4.6 的证明中所看到的，满足不等式(4.2)的函数，必满足以 $\mathscr{A}(r)$ 代 $\mathscr{M}(r)$ 而得的不等式．此外，不难证明，以 $\mathscr{A}(r)$ 代替 $\mathscr{M}(r)$，还可得到类似于定理 1.7 和不等式(4.2)的关于调和函数、次调和函数的另一个特征(参看 Rado [1])．

5.2 对于无界域上的调和(解析)函数，最大值原理(如推论1.3′所述)还有一些推广．这些结果可一般地描述如下：设给定一个闭无界域 $\mathscr{E}\subset E_n$ 上的连续函数，它在 $\mathscr{E}$ 内调和．如果在自变量增长(当 $x\in\mathscr{E}$ 并趋向 ∞)时，该函数满足某些弱的限制，而在 $\mathscr{E}$ 的边界上满足较强的条件(常常假定函数在 $\partial\mathscr{E}=\overline{\mathscr{E}}-\mathscr{E}$ 上有界)，则该函数在整个 $\mathscr{E}$ 上就满足这些较强的条件．这样的结果称为 Phragmén-Lindelöf 定理．推论 1.15 是其中一个特别简单的例子．下面是 Phragmén-Lindelöf 定理的一个相当一般的例子：设 u 在 E_{n+1}^+ 中调和，在 $\overline{E_{n+1}^+}=E_{n+1}^+\cup E_n$ 上连续，并且对一切 $a>0$，在每一带状区域 $S=\{(x,y)\in E_{n+1}^+;\ 0<y\leqslant y_0\}$ 内，有 $u(x,y)=o(e^{a|x|})$(当 $|x|\to\infty$)．此外，若再满足 $u(x,\ y)=o(y)$(当 $y\to\infty$)，则

(a) "对一切 $x\in E_n$，$u(x,0)\leqslant A<\infty$"蕴含"对一切 $(x,\ y)\in E_{n+1}^+$，$u(x,\ y)\leqslant A$"；

(b) "对一切 $x\in E_n$，$u(x,\ 0)\geqslant B>-\infty$"蕴含"对一切 $(x,y)\in E_{n+1}^+$，$u(x,\ y)\geqslant B$"；

(c) "对一切 $x\in E_n$，$|u(x,\ 0)|\leqslant C<\infty$"蕴含"对一切 $(x,\ y)\in E_{n+1}^+$，$|u(x,\ y)|\leqslant C$"．

为证明(比如说)(b)，我们可以假定 $B=0$(一般情况下的结果可由考虑函数 $u(x,\ y)-B$ 而化为 $B=0$ 的情况)．固定 $\delta>0$，令 $g(x,\ y)=\sin\left(a\sqrt{n}\,(y+\delta)\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\cosh ax_k$，则 g 是 E_{n+1} 上的调和函数(见本章开始时之例(6))．我们若能证明，对每个固定的 $\varepsilon>0$，$\eta>0$，在 $\overline{E_{n+1}^+}$ 上有 $u(x,\ y)+\varepsilon y+\eta g(x,\ y)\geqslant 0$，则 (b) 即可获证．而根据最小值原理知道，只需证明对一切充分大的 N 和 y_0，在柱形 $\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ |x|\leqslant N,\ 0\leqslant y\leqslant y_0\}$ 的边界上该不等式成立即可．选取 $a>0$ 和 $\delta>0$，使 $a<\pi/\sqrt{n}\,(y_0+\delta)$，于是 $\sin\left(a\sqrt{n}\,(y+\delta)\right)$ 是正值，且当 $0\leqslant y\leqslant y_0$ 时有非零下界，并且

$$\prod_{k=1}^{n}\cosh ax_k\geqslant 2^{-n}\prod_{k=1}^{n}e^{a|x_k|}=2^{-n}\exp\left\{a\sum_{1}^{n}|x_k|\right\}$$

$$\geqslant 2^{-n}\exp\{a|x|\}.$$

由此估计式连同 $u(x, y)=o(e^{a|x|})$ 和 $u(x, y)=o(y)$ 的假设，就推出所要的不等式：对 $|x|\geqslant N$（当 N 充分大）和 $0\leqslant y\leqslant y_0$，有 $u(x, y)+\varepsilon y+\eta g(x, y)\geqslant 0$. 我们可以适当减小 a 而选出足够大的 y_0，从而推出(b). 对 $-u$ 应用(b)可得(a)，综合两者显然推出(c).

5.3 我们曾证明(见引理 2.6 和不等式(4.8))，E_{n+1}^{+} 上的一个(非负)次调和函数 s，若对一切 $y>0$ 和某个 $p\geqslant 1$ 满足 $\|s(\cdot, y)\|_p\leqslant c$，则 $\|s(\cdot, y)\|_\infty=O(y^{-n/p})$. 我们发现，作为这一事实的推论，还可有更一般的结果：当 $q\geqslant p$ 时，$\|s(\cdot, y)\|_q=O(y^{(n/q)-(n/p)})$. 为证明这一点，我们注意到，

$$\int_{E_n}[s(x, y)]^q dx=\int_{E_n}[s(x, y)]^p[s(x, y)]^{q-p}dx$$
$$\leqslant\|s(\cdot, y)\|_\infty^{q-p}c^p\leqslant A[y^{-n/p}]^{q-p},$$

对上式开 q 次方，便得欲证之不等式.

5.4 定理 3.19 和 3.24 表明，在边界上非切向收敛的概念是根本性的，这可由处理单位圆盘上函数的下述两个结果来说明(借助保形映射可得上半平面的类似结果).

(i) 设 C_0 是过点 $z=1$ 的简单封闭曲线，它的其余点皆含于单位圆 $K=\{z=x+iy; |z|=1\}$ 的内部. 再设 C_0 与单位圆在点 1 处相切，且 C_θ 是 C_0 绕原点旋转 θ 角而得之曲线. 那么，存在一个定义在 K 内部的有界解析函数 F，使得对几乎一切 θ，当 z 在 C_θ 内部趋向 $e^{i\theta}$ 时，$F(z)$ 没有极限(参看 Zygmund [1], Vol. I, p. 280).

(ii) 设 G 是定义在单位圆 K 内部的连续函数，E 是 K 中的第一纲集，那么，存在一个定义在 K 内部的解析函数 F，使得当 $e^{i\theta}\in E$ 时，有

$$\lim_{r\to 1}\{F(re^{i\theta})-G(re^{i\theta})\}=0$$

(参看 Zygmund[1], Vol. II, p. 204).

由于 E 可以有测度 2π，所以，上述结果表明，在 K 的几乎一

切点上，解析函数的径向性质不比连续函数更好．例如，解析函数 F 可以沿几乎每一条半径趋于 0，而不恒等于 0．然而，一个解析函数，若在 K 的一个正测度子集上有非切向极限 0，则它必定恒等于 0（见 Zygmund[1]，Vol. II，p. 203）．此外，一个解析函数可以在几乎每条半径上有界（虽然明显地非一致），但仍可以在 K 的几乎一切点上没有径向极限．

5.5 定理 3.19 有若干推广．Carleson（见[1]）曾指出，如果（实值）调和函数 u 在 S 的每个点上有非切向下界或上界，则定理 3.19 的结论仍成立．在二维情形中，可以借助保形映射将这一结果很容易地推广到比上半平面更一般的区域上．Hunt 和 Wheeden（见[1]）已经就高维情形，对边界满足 Lipschitz 条件的区域 $\mathscr{D}$ 得到一个类似的推广．他们证明了，若 u 在这样的区域 $\mathscr{D}$ 内调和，且 $S\subset\partial\mathscr{D}$ 具有性质：对每个 $q\in S$，存在一个以 q 为顶点并在 $\mathscr{D}$ 的外部的开锥，且对每个 $q\in S$，u 在以 q 为顶点的截锥内有下界（或上界）．那么，在 S 的每一点上（可能要除掉一个调和测度为零的集），u 有有限非切向极限．

5.6 对引理 3.3 的证明略加修改，我们可得下述密切相关的结果：设有界子集 $F\subset E_n$ 的每个点 x，均对应一个以 x 为心的非空开球 S_x，则存在其中的可数开球族 $\{S_{x_i}\}$ 覆盖 F，且使每个 $x\in E_n$ 属于族中的至多 a_n 个开球（a_n 仅依赖于维数．事实上能证明，a_n 可选作 3^n）．利用这一结果，可将定理 3.4 推广为：设 ν_1，ν_2 是 E_n 上两个非负有限 Borel 测度，令 $\varphi(x)=\sup\{\nu_1(S_x)/\nu_2(S_x)\}$，此处上确界是对一切以 $x\in E_n$ 为心的开球 S_x 来取的（当 ν_2 是 Lebesgue 测度，且对某个可积函数 f，$\nu_1(S_x)=\int_{S_x} f$ 时，φ 就是 Hardy-Littlewood 极大函数 m_f）．那么，对 $F_s=\{x\in E_n;\ \varphi(x)>s>0\}$，有 $\nu_2(F_s)\leqslant a_n\nu_1(E_n)s^{-1}$．由此可以证明 ν_1 对 ν_2 可微，即，在一个 ν_2-测度为零的集外的一切 $x\in E_n$ 上，$\lim\{\nu_1(S_x)/\nu_2(S_x)\}=f(x)$ 存在，这里极限是对以 x 为心、半径趋于 0 的球来取的．如果将 ν_1 关于 ν_2 分解成绝对连续部分和奇异部分，则前者的

Radon-Nikodym 导数几乎处处等于 $f(x)$（仍然关于 ν_2）. 最后，我们指出，当其它的几何图形被允许代替球时，这些结论依然成立（参看 Cotlar[1], pp. 126-127）.

5.7 在定理 3.22 和推论 3.23 中，我们假定了 $1<p<\infty$. 在定理 3.22 证明的末尾，又讨论了 $p=\infty$ 的情形. 在那里我们指出，这种情形的结果可以用类似的推理来证明. 但 $p=1$ 的情形却完全不同：我们可以证明，存在一个函数 $f\in L^1(E_2)$，例如，使得对几乎一切 $x=(x_1, x_2)\in E_2$，当 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\to 0$ 时，其累次 Poisson 积分

$$u(x_1, \varepsilon_1, x_2, \varepsilon_2)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1-t_1, x_2-t_2)P(t_1, \varepsilon_1)P(t_2, \varepsilon_2)\,dt_1\,dt_2$$

不收敛于 $f(x_1, x_2)$（参见 Jessen, Marcinkiewicz 和 Zygmund [1]. 他们讨论的是单位圆上的累次 Poisson 积分. 那里的证明可以修改成为包含我们这里所讨论的情形）. 还可参看第三章 (6.6) 和 (6.8).

5.8 从我们对次调和函数的讨论中容易看出，若 s 有连续二阶偏导数，则下列三个条件是等价的：(i) s 次调和；(ii) $\Delta s\geqslant 0$；(iii) 若 $\mathscr{R}$ 是有界域，其闭包含于 s 的定义域中，u 在 $\overline{\mathscr{R}}$ 上连续，在 $\mathscr{R}$ 中调和，并在边界 $\partial\mathscr{R}=\overline{\mathscr{R}}-\mathscr{R}$ 上满足 $u\geqslant s$，则在 $\mathscr{R}$ 上有 $u\geqslant s$（见定理(4.5). 有若干种方式来推广这一结果，我们仅略述其中与处理缓变广义函数（见本书第一章 § 3）有密切关系的一种推广. 定义在某区域 D 上的连续函数 s，如果对 C^∞ 中非负的且在 D 内具有紧支集的函数 φ 都满足 $\int_D s\,\Delta\varphi\geqslant 0$，我们就称 s 有非负广义 Laplace 变换（利用分部积分可知，若 s 有连续二阶偏导数，则 s 有非负广义 Laplace 变换等价于上述之(ii)）. 首先，我们证明这样的函数 s 是次调和的. 为此我们证明 s 满足平均值不等式 (4.2). 根据第二章定理 1.25，只需对每个函数

$$s_\varepsilon(x)=\int_D s(t)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dt$$

（处处有定义）证明(4.2)即可，此处 φ 是 C^∞ 中非负并具有紧支集

的函数，且其积分为1，$\varepsilon>0$ 充分小．由定理4.3知，当 $\Delta s_\varepsilon \geqslant 0$ 时，这是正确的．如上面所看到的，它等价于 $\int_D s_\varepsilon \Delta\psi \geqslant 0$，其中 ψ 是任意 C^∞ 中的非负且具有紧支集（含于 D 中）的函数．选 $\varepsilon>0$ 足够小，并将 ψ 的支集选在 D 的适当紧子集内，便有

$$\int_D s_\varepsilon \Delta\psi = \int_D s\,\Delta(\tilde{\varphi}_\varepsilon * \psi) \geqslant 0$$

（$\tilde{\varphi}$ 表示 φ 的反射，其定义写在第一章等式(3.12)之前）．这表明，s 是次调和的．定理4.5告诉我们，(i)又推出调和控制性质(iii)．而后者又立即推出平均值不等式(4.2)．假定 s 满足平均值不等式(4.2)，我们来证明它有非负广义 Laplace 变换．设有以0为心、以 δ 为半径的球，令其上的特征函数除以 $\Omega_n\delta^n$ 后所得的函数为 η_δ．那么，(4.2)可以表示为不等式 $s \leqslant s*\eta_\delta$．于是，对一切 C^∞ 中非负的且在 D 内具有紧支集的 φ，有 $\int_D s\varphi \leqslant \int_D (s*\eta_\delta)\varphi$，或等价地有

$$\int_D s(\eta_\delta * \varphi - \varphi) \geqslant 0.$$

但在 $\delta \to 0$ 时，$\{\eta_\delta * \varphi - \varphi\}/\delta^2$ 趋于一个正的常数乘以 $\Delta\varphi$．所以

$$\int_D s\,\Delta\varphi \geqslant 0.$$

文献注释

Kellog [1] 是关于三个变量调和函数理论的综合课本．对一般 n 维情形的更新的论述可参看 Brelot [1]．Poisson 积分的特征是一古典结果，这里采用的证明与证明三角级数的 Cesáro、Abel 平均的特征没有多少差别，它们可在 Zygmund [1] 第三章中看到．定理3.10和不等式(3.18)是 Hardy 和 Littlewood [1] 得出的关于单位圆上函数的 Poisson 积分的相应结果在上半空间的推广．对此及其变型可参看 K. T. Smith [1]．定理3.19和3.24应归于 Calderón．一维的极大函数是由 Hardy 与 Littlewood [1] 首先引进的，由 Wiener [2] 推广到多变量的．这里用到的与覆盖引理有关的内容可

参看 Wiener [2], Marcinkiewicz 和 Zygmund [1], Besicovitch [2], Cotlar [1] 及 de Guzmán [1]. 定理 3.12 与 Cotlar [1] 的结果密切相关. 一个较早且更一般的结果归于 Banach [1]. 关于两个变量的次调和函数理论的综合论述可见 Rado [1]. 定理 4.6 可在 Stein 和 G. Weiss [1] 中找到. 关于积分的强可微性的更完整的讲述可参看 Saks [1].

第三章　管上的 H^p 空间理论

为了保证定义在上半平面的调和函数有边界值，须得对它们加些较强的条件，前一章的第2、3节讨论的就是这种情况．然而，如果我们考虑的是满足某些偏微分方程的调和函数系(例如，满足 Cauchy-Riemann 方程的解析函数的实部与虚部所组成的函数系)，那么，较弱的条件就足以保证边界值的存在了．在本章第1节将较为详细地讨论这些事实，而本章其余各节将用于讨论定义在管上的全纯函数．这些管形区域可能是研究多复变量全纯函数与 Fourier 分析之间关系的一个最自然的区域．在第2节，我们要研究这种函数的 H^2 空间理论；在第3节，我们将考察这种空间的一个重要的特殊情形：其基为锥的那种管上的 H^2 空间；在第4节，我们将得到这些结果的一个推论——Paley-Wiener 定理对多变量情形的推广；在第5节中，我们研究管域上更一般的 H^p 空间，我们把这种空间的问题转化成其基为某些特殊锥的那种管上的问题来研究．

§1　引　　言

在前一章我们已经看到(见定理2.1)，如何从 $L^p(E_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 中函数 f 的 Poisson 积分得出一个定义在 E^+_{n+1} 上且对一切 $y>0$ 满足条件

$$\text{(1.1)}\qquad \int_{E_n}|u(x,\ y)|^p\,dx\leqslant A^p<\infty$$

的调和函数 u，其中 $A=\|f\|_p$．而且，对几乎一切 $x\in E_n$，$u(x,\ y)$ 非切向收敛于 $f(x)$(见定理3.16)．

前一章的定理2.5告诉我们：(1.1)型的不等式刻划了 E^+_{n+1} 上调和函数是一个 Poisson 积分的特征，从而推出非切向边界值的

存在性. 可以证明, 上面这些结果在下述意义下是最好的: 若 $0<p<1$, 不等式(1.1)就不再能推出在 $y\to 0$ 时非切向边界值的存在性, 也就是说, 对每个 p, $0<p<1$, 存在一个调和函数, 它满足(1.1), 但在 E_{n+1}^{+} 的边界 E_n 上不能几乎处处有非切向极限.

对于 $n=1$ 来说, 如果代替调和函数而考虑解析函数, 那么情况就大不相同了. 比如说, 设 $F(z)=F(x+iy)$ 对 $y>0$ 是全纯的(即在上半平面 E_2^+ 中是全纯的), 并且对 $p>0$ 满足

$$
(1.2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p\,dx \leqslant A^p < \infty, \quad y>0,
$$

那么, 如果 z 非切向趋于 x, 则极限 $\lim\limits_{z\to x} F(z)=F(x)$ 对几乎每个 $x\in(-\infty,\ \infty)$ 存在. 我们把定义在 E_2^+ 上, 并对某个常数 $A<\infty$ 满足(1.2)的全体全纯函数的类记作 $H^p=H^p(E_2^+)$. 较为熟悉的是与单位圆盘 $D=\{z\in E_2;\ |z|<1\}$ 相应的 H^p 空间, 它由这样的解析函数 F 组成: 在 D 中, F 满足

$$
(1.3) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant A^p < \infty, \quad 0\leqslant r<1.
$$

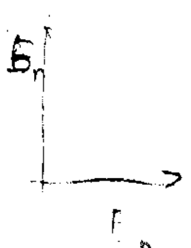
这样的 F, 也几乎对每个 $\theta\in[-\pi,\ \pi]$, 有非切向极限 $F(e^{i\theta})$ 存在. 此外, 在 $H^p(E_2^+)$ 和 $H^p(D)$ 两种情形中, $F(x)$ 和 $F(e^{i\theta})$ 还都是依"范数"的极限, 即, 当 $F\in H^p(E_2^+)$ 时, 有

$$
(1.4) \qquad \lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)-F(x)|^p\,dx=0,
$$

而当 $F\in H^p(D)$ 时, 有

$$
(1.4') \qquad \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})-F(e^{i\theta})|^p\,d\theta=0.
$$

我们打算把这些概念和结论推广到高维情形. 在推广过程中, 会遇到多种根本不同的办法. 一种涉及到多复变函数理论的办法是: 令 B 是 E_n 的开子集, 则以 B 为基的管 T_B 是使 $y\in B$ 的一切 $z=(z_1,\ \cdots,\ z_n)=(x_1+iy_1,\ \cdots,\ x_n+iy_n)=x+iy\in C_n$ (=n 维复欧氏空间)的集合. 例如, E_2^+ 是 C_1 中以 $B=\{y\in E_1;\ y>0\}$ 为基的



管. 对于定义在管 T_B 上的全纯函数 F [1], 如果存在一个常数 $A<\infty$, 使得对一切 $y\in B$, 有

$$(1.5)\qquad \int_{E^n} |F(x+iy)|^p dx \leqslant A^p,\ p>0,$$

就称F属于空间 $H^p=H^p(T_B)$. 这显然推广了空间 $H^p(E_2^+)$的定义. 我们定义 $F\in H^p(T_B)$ 的范数 $\|F\|_p$ 为使(1.5)成立的 A 的最小值.

另一种推广办法是由于观察到"单复变函数 $F=u+iv$ 在单连通区域上是解析的, 当且仅当(v, u)是该区域中一个调和函数的梯度"而引出来的. 对于一个定义在 E_n 中某个区域上的向量值函数 $F=(u_1, \cdots, u_n)$, 如果它是该区域上某个调和函数的梯度, 我们就可以认为它是"推广了的解析函数". 更一般地, 我们考察定义在区域 $D\subset E_n$ 上, 且满足偏微分方程

$$(1.6)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\ \ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

的向量值函数 $F=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. 上述条件也可以写成下述形式:

$$(1.6')\qquad \operatorname{div} F=0,\ \operatorname{curl} F=0.$$

我们注意到, 从第二个条件可推知, F 在 D 的单连通子域上是某函数 h 的梯度, 而第一个条件则保证 h 是调和的. 当 $n=2$ 时, (1.6)就是 Cauchy-Riemann 方程. 此时, u_2+iu_1 是 $z=x_1+ix_2$ 的解析函数. 如果 F 正是定义在 E_{n+1}^+ 上的这种函数, 并且存在一个常数 $A<\infty$, 使得对一切 $y>0$, 有

$$(1.7)\quad \int_{E_n} |F(x,\ y)|^p dx=\int_{E_n} \Big(\sum_{j=1}^{n+1} |u_j(x,\ y)|^2\Big)^{p/2} dx \leqslant A^p \text{ [2]}.$$

这样, 我们就得到了空间 $H^p(E_2^+)$之定义的一个推广.

---

1) 我们说一个定义在 $D\subset C_n$ 上的函数是全纯的, 如果对每个 $z_0=(z_1^0, \cdots, z_n^0)\in D$, 存在一个多重圆盘 $\{z=(z_1, \cdots, z_n)\in C_n;\ |z_1-z_1^0|<r_1, \cdots, |z_n-z_n^0|<r_n\}\subset D$, 使得在其上, F 可以表成一个绝对收敛的幂级数:

$$F(z)=\sum_{k_1,\cdots,k_n\geqslant 0} a_{k_1\cdots k_n}(z_1-z_1^0)^{k_1}\cdots(z_n-z_n^0)^{k_n}.$$

2) 我们提醒读者, (1.7)中所论及的是 $n+1$ 个变量的调和函数, 其中 $y=x_{n+1}$.

这一章，我们只研究管上的 H^p 空间．至于第二种推广，我们将在第六章中讨论．

§2 H^2 空间理论

取定 E_n 的一个连通开子集 B，我们来研究空间 $H^2(T_B)$．要构造出这个空间的函数并不困难．事实上，设 f 是一个函数，它满足条件：

$$(2.1)\qquad \sup_{y\in B}\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y\cdot t}dt\leqslant A^2<\infty.$$

记 $z=x+iy$，$z\cdot t=z_1t_1+z_2t_2+\cdots+z_nt_n$．我们将证明：当 y 被限制在 B 的一个紧子集之中时，$|e^{2\pi iz\cdot t}f(t)|=e^{-2\pi y\cdot t}|f(t)|$ 被一个可积函数所控制．于是就可得知

$$(2.2)\qquad F(z)=\int_{E_n}e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt$$

定义了 T_B 上的一个全纯函数．

为此，我们仅需证明，$e^{-2\pi y\cdot t}|f(t)|$ 在任意一点 $y_0\in B$ 的一个邻域中被一个可积函数控制．由于 B 是开的，显然存在 y_0 的邻域 $N\subset B$，并且对 $y\in N$ 有

$$\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}e^{-4\pi(y-y_0)\cdot t}dt\leqslant A^2.$$

我们将 E_n 分解成有限多个互不相交的多角锥 $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \cdots,\ \Gamma_k$ 的并，它们的顶点都在原点 0，且对同一锥中的任何二点 v、w，线段 $0v$ 与 $0w$ 之间的夹角小于(比如说)$\pi/4$．因 N 是 y_0 的一个邻域，所以存在 $\delta>0$，使得 $\{y;\ |y-y_0|<\delta\}\subset N$．令 $\varepsilon=4\pi\delta/\sqrt{2}$，并选 y，使 $(y_0-y)\in\Gamma_j$，$|y-y_0|=\delta$，那么，当 $t\in\Gamma_j$ 时，$\varepsilon|t|\leqslant-4\pi(y-y_0)\cdot t$．由此，得

$$\int_{\Gamma_j}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}e^{\varepsilon|t|}dt\leqslant\int_{\Gamma_j}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}e^{-4\pi(y-y_0)\cdot t}dt\leqslant A^2.$$

因此可得，

$$\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}e^{\varepsilon|t|}\,dt=\sum_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}e^{\varepsilon|t|}\,dt\leqslant kA^2<\infty.$$

所以，$\int_{E_n} |f(t)| e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{+(\varepsilon/4)|t|}\, dt$

$$= \int_{E_n} (|f(t)| e^{(\varepsilon/2)|t|} e^{-2\pi y_0\cdot t}) e^{-(\varepsilon/4)|t|}\, dt$$

$$\leqslant \left(\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{\varepsilon|t|} e^{-4\pi y_0\cdot t}\, dt\right)^{1/2} \left(\int_{E_n} e^{-(\varepsilon/2)|t|}\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

由此，当 y 位于以 y_0 为心、以 $\varepsilon/8\pi$ 为半径的球中时，

$$|f(t)| e^{-2\pi y\cdot t} \leqslant |f(t)| e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{(\varepsilon/4)|t|},$$

此式右端是 t 的可积函数.

直接应用 Plancherel 定理便知，对于 $y \in B$，有

$$\int_{E_n} |F(x+iy)|^2\, dx = \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t}\, dt \leqslant A^2 < \infty.$$

于是，(2.2)定义的解析函数 $F(z)$ 属于 $H^2(T_B)$. 实际上，$H^2(T_B)$ 空间上函数的基本表示定理指出，所有这些函数都有 (2.2) 的形式. 即，

定理 2.3 F 属于 $H^2(T_B)$ 当且仅当它能表成 (2.2) 的形式，其中 f 是满足(2.1)的函数.

我们首先介绍定理的几个推论，以此来说明定理的重要性，而把定理的证明放到本节末尾.

若 $B \subset E_n$，令 B^c 表示 B 的凸包，即 B^c 是包含 B 的最小凸集. 容易看出，B^c 是由一切有限和式 $x = \sum \lambda_i x_i$ 组成，其中，$\sum \lambda_i = 1$，$\lambda_i \geqslant 0$，$x_i \in B$. 由此立即可知，若 B 为开集，则 B^c 亦为开集. 下列推论表明，我们还可以只限于讨论基 B 是凸的.

推论 2.4 若 $F \in H^2(T_B)$，则积分(2.2)对一切 $z \in T_{B^c}$ 都有定义，它给出了一个 $H^2(T_{B^c})$ 中与 F 有相同范数的函数.

证明 首先，由 Plancherel 定理和定理 2.3 推出，

$$\text{(2.5)} \qquad \|F\|_2 = \sup_{y \in B} \left(\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t}\, dt\right)^{1/2}.$$

令 $$S = \left\{ y \in E_n;\ \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t}\, dt \leqslant \|F\|_2^2 \right\}.$$

显然 $B \subset S$，我们只需证明 S 是凸集即可. 于是我们假设 y' 和 y'' 属于 S，且 $y = \alpha y' + (1-\alpha) y''$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 利用不等式 $u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant$

$\alpha u+(1-\alpha)v$(对任意两个非负数 u、v 成立)，得到

$$\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y\cdot t}\,dt$$

$$=\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi\alpha y'\cdot t}e^{-4\pi(1-\alpha)y''\cdot t}\,dt$$

$$=\int_{E_n}(|f(t)|^2e^{-4\pi y'\cdot t})^{\alpha}(|f(t)|^2e^{-4\pi y''\cdot t})^{1-\alpha}\,dt$$

$$\leqslant\alpha\int_{E_n}|f(x)|^2e^{-4\pi y'\cdot t}dt+(1-\alpha)\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y''\cdot t}\,dt$$

$$\leqslant\|F\|_2^2.$$

所以有 $y\in S$. 这说明 S 是凸集. 推论证毕. 】

从现在起，我们假定基 B 是凸集，也是开集.

推论 2.6 $H^2(T_B)$ 含有不恒为 0 的函数的充分必要条件是，B 不含整条直线.

证明 假设 B 包含由点 $y=a\tau+b$, $-\infty<\tau<\infty$, 组成的直线. 记 $N(t_0)$ 是 t_0 在 E_n 中的球形邻域，且在其中 $a\cdot t$ 在 0 点以外为有界. 那么，对在该直线上的 y、$F\in H^2(T_B)$ 以及满足(2.2)和(2.1)的 f(f 的存在性由定理 2.3 保证)，有

$$\|F\|_2^2\geqslant\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y\cdot t}\,dt$$

$$\geqslant\int_{N(t_0)}|f(t)|^2e^{-4\pi\tau(a\cdot t)}e^{-4\pi(b\cdot t)}dt.$$

但由于 τ 可以在实直线上任意选择，因而可以使 $e^{-4\pi\tau(a\cdot t)}$ 在 $N(t_0)$ 中随意地大. 这就说明，在 $N(t_0)$ 中几乎处处有 $f(t)=0$. 推论的第一部份得证.

为了证明，若 B 不含直线，则 $H^2(T_B)$ 必含有 $F\neq0$, 我们首先注意到，当 B 不含直线时，必存在一个开凸锥 Γ 包含 B 而不包含整条直线[3]. 这说明 Γ 是正则的(见 § 3). 对这种锥，$H^2(T_\Gamma)$ 确实含有 $F\neq0$. 从而就得出推论 2.6 成立. 】

鉴于一维的情形，我们对管 T_B 上 H^p 空间理论所期待的核心问题是：若 y_0 是 B 的边界点，那么极限

3) 在后面(6.15)中，我们粗略地证明这个几何事实.

$$F(x+iy_0)=\lim_{y\to y_0,\,y\in B}F(x+iy) \tag{2.7}$$

是否存在？若存在，是在什么意义下？

我们可以给这个问题一个肯定的、但不完全满意的回答．首先，若 y_0 是 B 的边界点，由 Fatou 引理和(2.5)知，

$$\int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y_0\cdot t}dt\leqslant\|F\|_2^2.$$

那么，由于 $f(t)e^{-2\pi y_0\cdot t}$ 是 $L^2(E_n)$ 中的函数，我们就可以对它做 Fourier 逆变换，从而把积分(2.2)的定义推广到 $z=x+iy_0$．也就是说，我们形式上得到了一个对几乎处处有定义的 x 的 L^2 函数：

$$F(x+iy_0)=\int_{E_n}e^{2\pi i(x+iy_0)\cdot t}f(t)dt. \tag{2.8}$$

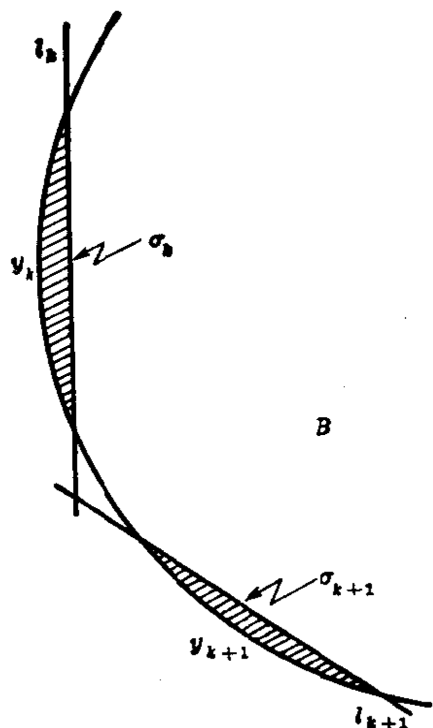
在这种意义上说，我们可以把 (2.7) 中的极限赋予下述含义：做 $F_y=F(\cdot+iy)$的 Fourier 变换并取极限，再做 Fourier 逆变换.

如同在一维情形那样，我们不无理由期望，当 $y\in B$ 而趋向 y_0 时，$F(x+iy)$或是对几乎处处的 x，或是依L^2 范数趋向$F(x+iy_0)$．但是，我们现在要证明，一般来说并非如此．

设 l 是 E_2 中的一条直线，y_1 是线外一点．l 的方程可以写作 $y\cdot\alpha=\beta$，其中 α 是固定向量，β 是固定实数．那么，E_2 被分成二个互不相交的半空间：一切使 $y\cdot\alpha>\beta$ 的 y 的集合和一切使 $y\cdot\alpha<\beta$ 的 y 的集合．假设 y_1 属于前者，则双复变元 $z=(z_1,\ z_2)=(x+iy)$ 的函数 $G(z)=\exp\{-i\rho(z\cdot\alpha-i\beta)\}$ $(\rho>0)$ 满足条件：$|G(z)|=\exp\{\rho(y\cdot\alpha-\beta)\}$，当 y 位于 l 上时，$|G(z)|=1$；对于不含 y_1 的半空间中的 y，有 $|G(z)|<1$；如果 $y=y_1$，则 $|G(z)|=N>1$．若 ρ 选得足够大，就可使得上述之 N 任意大．此外，如果 $z=x+iy$ 满足$(y_1-y)\cdot a\geqslant0$，则 $|G(z)|\leqslant N$.

现在，设 B 是 E_2 的上半平面中的一个圆盘，且 0 点在其边界上．在 B 的边界上取收敛于 0 的序列 $\{y_k\}$．对每一 y_k，做直线 l_k，交 B 的边界于 y_k 的两侧，则两交点间含 y_k 的那段弧与直线 l_k 围成一个扇形，记由此构成的伴随扇形序列为 $\{\sigma_k\}$．我们进一步假定 l_k 与 y_k 很接近，使得各 σ_k 互不相交(如图)；而且 l_k 平行于 B

在 y_k 的切线. 于是对每个 k, 我们可以构造一个在前段中所描述过的函数 G_k, 满足



(i) G_k 在 C_2 中解析;

(ii) $|G_k(x+iy)|$ 仅依赖于 y;

(iii) 若 $z\in T_B-T_{\sigma_k}$, 则

$$|G_k(z)|\leqslant 1;$$

(iv)

$$|G_k(x+iy_k)|=1+2^{k+2}=N_k,$$

且当 $z\in T_{\sigma_k}$ 时, $|G_k(z)|\leqslant N_k$. 于是我们定义函数

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}G_k(z).$$

如果 $z\in T_B$, 那么, 它要么就严格地属于 T_{σ_k} 之一, 比如说, $z\in T_{\sigma_{k_0}}$, 要么就根本不属于它们. 对前一种情形, 由(iii)及(iv)的后部, 我们有

$$|F(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_0-1}2^{-k}+(2^{-k_0}+4)+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}2^{-k}=5.$$

而对后一种情形, 有

$$|F(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1.$$

这就说明 $F\in H^\infty(T_B)$. 对 $k=1, 2, \cdots$, 由(ii)和(iv), 我们可以找到与y_k充分接近的点 $y'_k\in\sigma_k$, 使得 $|G_k(x+iy'_k)|>N_k-1$. 于是

$$|F(x+iy'_k)|\geqslant 2^{-k}|G_k(x+iy'_k)|-\sum_{j\neq k}2^{-j}|G_k(x+iy'_k)|$$

$$>2^{-k}(N_k-1)-\sum_{j\neq k}2^{-j}>4-1=3.$$

这说明, 如果我们在一切扇形 σ_k 之外, 取趋向于边界点 0 的序列, 那么对该序列的每个 y, 有 $|F(x+iy)|\leqslant 1$. 另一方面, $\lim\limits_{k\to\infty}y'_k=0$, 且 $|F(x+iy'_k)|>3$. 这就证明, 对任一 $x\in E_2$, 点态极限

$$\lim_{y\in B,y\to 0}F(x+iy)$$

不存在.

为了给出 $H^2(T_B)$ 的一个函数的例子以说明当 y 在 B 内任意地趋向 0 时，它没有按 L^2 范数的极限，我们只需对 $B'\supset\overline{B}$ 去找出一个函数 $G\in H^2(T_{B'})$，使得 $G(x+i0)=G(x)\neq 0$，再将它乘以刚才所得的 F 即可．这时，若 $y=y'_k$，$k=1, 2, \cdots$，则

$$\int_{E_n}|F(x+iy)G(x+iy)|^2dx\geqslant 9\int_{E_n}|G(x+iy)|^2dx,$$

而当 $y\in B$ 且不属于任何一个 σ_k 时，

$$\int_{E_n}|F(x+iy)G(x+iy)|^2\,dx\leqslant\int_{E_n}|G(x+iy)|^2dx.$$

因此，按 L^2 范数的极限

$$\lim_{y\in B,y\to 0}F(x+iy)G(x+iy)$$

不存在．对 $z=(z_1, z_2)=(x_1+iy_1, x_2+iy_2)$，$y_1>-\frac{1}{2}$，$y_2>-\frac{1}{2}$，$G(z)=1/(z_1+i)(z_2+i)$ 就是这种函数的一个例子．显然它在管 $T_{B'}(\overline{B}\subset B')$ 上有定义并解析，此外还有

$$\begin{aligned}&\int_{E_2}|G(x+iy)|^2dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_1+i(y_1+1)|^2|x_2+i(y_2+1)|^2}\,dx_1dx_2\\&\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}\,dx\right\}^2<\infty.\end{aligned}$$

于是，$G\in H^2(T_{B'})$．

然而，如果我们取特殊的 B，就可以得到趋向边界点时的 L^2 极限．我们把 E_n 的一个有限子集的凸包的内部定义为一个开多面体．下面的结论说明，特别地，当 B 是开多面体时，在 B 的每个边界点上，(2.7) 按 L^2 范数的极限都存在：

推论 2.9 设 P 是 E_n 中的一个开多面体，且 $F\in H^2(T_P)$．如果按 (2.8) 将 F 延拓到集 $T_{\overline{P}}$ 上，则从 $\overline{P}$ 到 $L^2(E_n)$ 的映射 $y\to F(x+iy)$ 是连续的．

证明 根据Plancherel定理，我们只需证明映射 $y \to f(t)e^{-2\pi y\cdot t}$ 是连续的. 设 $\bar{P}$ 是有限集 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} \subset E_n$ 的凸包. 令

$$G(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{-4\pi y_j\cdot t}|f(t)|^2.$$

显然，函数 G 在 E_n 上可积. 而且，对每个 $y\in\bar{P}$，它控制着 $e^{-4\pi y\cdot t}|f(t)|^2$. 这是因为，若 $y\in\bar{P}$，那么 $y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\cdots+\alpha_k y_k$，其中 α_j 是非负数，且其和为1. 这就推出

$$e^{-4\pi y\cdot t}=\exp\left\{-4\pi\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(y_j\cdot t)\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{k}\left(e^{-4\pi(y_j\cdot t)}\right)^{\alpha_j}\leqslant\sum_{j=1}^{k}\alpha_j e^{-4\pi y_j\cdot t}.$$

现在，对于 y, $\bar{y}\in\bar{P}$, $y\to\bar{y}$，我们便有

$$|f(t)e^{-2\pi y\cdot t}-f(t)e^{-2\pi\bar{y}\cdot t}|^2\to 0;$$

且其收敛性还被 $4G(t)$ 控制. 于是推论2.9便由Lebesgue控制收敛定理推得. 】

推论 2.10 设 B 是 E_n 的一个开凸子集，y_0 是它的一个边界点. 假定 $F\in H^2(T_B)$，又 P 是含于 B 中、并以 y_0 为边界点的开多面体，则当 y 在 P 内部趋向于 y_0 时，$F(x+iy)$ 按 L^2 范数趋于 $F(x+iy_0)$，此处 $F(x+iy_0)$ 是按(2.8)定义的.

由于 $H^2(T_B)\subset H^2(T_P)$，所以推论2.10恰好是推论2.9的特殊情形.

不难看出，我们刚才给出的反例可以按这种方式修改成对非多角形边界点的每个边界点都适用. 这里，多角形边界点 y_0 指的是组成 B 的边界 ∂B 的两直线节的交点(并不排除两个线节在同一直线上的可能性. 不过，在这种情形，y_0 一定在边界 ∂B 的一个线节的内部). 若 y_0 不是多角形边界点，那么由 B 的凸性，我们可以在 ∂B 上找到一个收敛于 y_0 的序列 $\{y_j\}$，使得开线节 $\overline{y_j y_0}$ 位于 B 的内部. 这就使我们能够找到一个互不相交的扇形序列 $\{\sigma_k\}$，该序列有伴随解析函数序列 $\{G_k\}$，且如同在前面反例中一样，由 $\{G_k\}$ 我们可以构造函数 F. 由此，再用推论2.9，就得到(2.7)在

二维情形按 L^2 意义极限存在的充分必要条件.

定理 2.11 若 B 是 E_2 的开凸子集，$y_0\in\partial B$. 则对每个 $F\in H^2(T_B)$，当且仅当 y_0 是 B 的多角形边界点时，极限

$$\lim_{y\to y_0,\, y\in B} F(x+iy)=F(x+iy_0)$$

在 L^2 中存在.

一般说来，如果(2.7)的极限存在(在 L^2 中，或几乎处处，或在 L^p 中，…)，我们将称之为非限制极限(在 L^2 中，或几乎处处，或在 L^p 中，…). 如果当 y 在 B 内的一个多面体内部趋向 B 的边界点 y_0 时，极限存在，我们就称在 y_0 有限制极限存在(L^2，或几乎处处，或 L^p，…). 按这种说法，推论 2.10 说的是，对于一切 H^2 函数，在所有边界点上，L^2 限制极限存在. 另一方面，定理 2.11 则给出 $n=2$ 时 L^2 非限制极限存在的充分必要条件.

现在，我们来证明定理 2.3. 首先给出一个引理：若 $F\in H^2(T_B)$，则 F 在一个"严格小"的管上一致有界. 由于在后文中需要更一般的结果，所以我们对更广一类的空间 $H^p(T_B)$(见(1.5))来叙述并证明这一引理. 具体地说，就是

引理 2.12 设 $F\in H^p(T_B)$，$p>0$，又 $B_0\subset B$，且满足 $d(B_0, B^c)=\inf\{|y_1-y_2|;\ y_1\in B_0,\ y_2\notin B\}\geqslant\varepsilon>0$. 则存在一个依赖于 ε 和 n 而不依赖于 F 的常数 $C=C(\varepsilon, n)$，使得

$$\sup_{z\in T_{B_0}}|F(z)|\leqslant C\|F\|_p.$$

证明 设 $z_0=x_0+iy_0\in T_{B_0}$，令 $S_\varepsilon=\{z\in C_n;\ |z-z_0|<\varepsilon\}$. 若 $\Sigma_\varepsilon=\{y\in E_n;\ |y-y_0|<\varepsilon\}$，则 $S_\varepsilon\subset T_{\Sigma_\varepsilon}\subset T_B$. 因此，若用 Ω_m 表示 $E_m(m\geqslant1)$ 中单位球的体积，则有

$$\begin{aligned}\left(\int_{S_\varepsilon}|F(z)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}&\leqslant\left(\int_{T_{\Sigma_\varepsilon}}|F(z)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{\Sigma_\varepsilon}\left\{\int_{E_n}|F(x+iy)|^p\,dx\right\}dy\right)^{1/p}\\&\leqslant\|F\|_p(\Omega_n\varepsilon^n)^{1/p}.\end{aligned}$$

另一方面，因 $|F|^p$ 作为 $2n$ 个变量的函数是次调和的(见第二章 § 4 例(3)和定理 4.4′). 因而

$$|F(z_0)|^p \leqslant \Omega_{2n}^{-1}\varepsilon^{-2n}\left(\int_{S_\varepsilon} |F(z)|^p\, dx\, dy\right).$$

综合上述不等式，我们得到 $|F(z_0)| \leqslant C\|F\|_p$，其中 $C=(\Omega_n/\Omega_{2n})^{1/p}\varepsilon^{-n/p}$. 】

为了建立定理 2.3, 我们需要证明的是，若 $F\in H^2(T_B)$, 则必存在一个满足(2.1)并给出 F 的表示式(2.2)的函数 f(其逆命题已经证明).

对 $y\in B$, 令 f_y 是 $F(x+iy)$ 作为 x 的函数时的 Fourier 变换. 显然我们只需证明，若 y, $y'\in B$, 则对几乎处处的 t 成立着 $e^{2\pi y'\cdot t}f_{y'}(t)=e^{2\pi y\cdot t}f_y(t)$. 这样，由于 $f(t)=e^{2\pi y\cdot t}f_y(t)$ 不依赖于 $y\in B$, 而几乎处处有定义，那么取 $A=\|F\|$, f 就满足(2.1), 且(2.2)必定成立(见定理 2.3 前面的推理). 显然，我们只需对其闭包位于 B 中且其各边平行于坐标轴的立方体 Q 内的 y, y' 给出证明即可. 我们暂时进一步假定，$|F(x+iy)|$ 作为 x 的函数被一个函数(对 $y\in Q$)一致控制，该函数当 x 趋向 ∞ 时，相当快地趋向于 0. 最后，我们还注意到，只需先对形如 $y=(\eta_1, y_2, \cdots, y_n)$, $y'=(\eta_1', y_2, \cdots, y_n)$, 且 y, $y'\in Q$ 的情况加以证明，再重复这种论证，就能得到所需结果. 假设 $\eta_1'\geqslant\eta_1$, 那么依 Cauchy 积分定理，有

$$\begin{aligned}
0=&\int_{-R}^{R} e^{-2\pi i(x_1+i\eta_1)t_1}F(x_1+i\eta_1, \cdots, x_n+iy_n)dx_1\\
&+\int_{\eta_1}^{\eta_1'} e^{-2\pi i(R+i\eta)t_1}F(R+i\eta, \cdots)d\eta\\
&+\int_{R}^{-R} e^{-2\pi i(x_1+i\eta_1')t_1}F(x_1+i\eta_1', \cdots)dx_1\\
&+\int_{\eta_1'}^{\eta_1} e^{-2\pi i(-R+i\eta)t_1}F(-R+i\eta, \cdots)\, d\eta.
\end{aligned}$$

根据我们的假定，当 $R\to\infty$ 时，第二项与第四项趋于 0. 于是，对 $x_2, \cdots, x_n$ 积分，便得到

$$\begin{aligned}
e^{2\pi y\cdot t}f_y(t)=&\int_{E_n} e^{-2\pi i(x+iy)\cdot t}F(x+iy)dx\\
=&\int_{E_n} e^{-2\pi i(x+iy')\cdot t}F(x+iy')dx=e^{2\pi y'\cdot t}f_{y'}(t).
\end{aligned}$$

现在我们说明，如何从这里得出一般 $F\in H^2(T_B)$ 的情形. 依引理 2.12, F 在 T_Q 上有界，比如说对 $z\in T_Q$ 有 $|F(z)|\leqslant M$. 那么，对 $z=(z_1, \cdots, z_n)\in T_Q$ 和 $\varepsilon>0$, 我们定义

$$F^{(\varepsilon)}(z)=e^{\left\{-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}z_j^2\right\}}F(z).$$

于是对 $y\in Q$, 有

$$|F^{(\varepsilon)}(x+iy)|\leqslant Me^{\varepsilon na^2}e^{-|x|^2\varepsilon},$$

此处，$a=\max\limits_{y\in Q}\{|y_1|, \cdots, |y_n|\}$. 把刚才的论证用到 $F^{(\varepsilon)}(x+iy)$ 的 Fourier 变换 $f_y^{(\varepsilon)}$ 上，于是对于 $y, y'\in Q$, 便得到

$$e^{2\pi y\cdot t}f_y^{(\varepsilon)}(t)=e^{2\pi y'\cdot t}f_{y'}^{(\varepsilon)}(t). \tag{2.13}$$

而当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\int_{E_n}|F^{(\varepsilon)}(x+iy)-F(x+iy)|^2dx\to 0$. 所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时，等式(2.13)两端的极限仍保持相等. 这就是说，我们可以应用 Plancherel定理而得到 $f_y^{(\varepsilon)}\to f_y$ 和 $f_{y'}^{(\varepsilon)}\to f_{y'}$ 的 L^2 收敛. 从而对几乎每个 t, 有

$$e^{2\pi y\cdot t}f_y(t)=e^{2\pi y'\cdot t}f_{y'}(t).$$

定理 2.3 证毕. 】

§3 锥上的管

我们自然希望，在对基的类型加些限制时，H^2 空间(或更一般地，H^p 空间)的理论会变得更加丰富. 特别是以开锥为基的管的情形更会是如此. 所谓开锥是一个非空子集 $\Gamma\subset E_n$, 满足 (i) $0\notin\Gamma$; (ii) 若 $x, y\in\Gamma$, 且 $\alpha, \beta>0$, 则 $\alpha x+\beta y\in\Gamma$. 特别注意到，$\Gamma$ 是凸集.

开锥的闭包叫闭锥. 显然，若 Γ 为开锥，则 $\Gamma^*=\{x\in E_n; x\cdot t\geqslant 0, t\in\Gamma\}$ 是闭的. 而且，若 Γ^* 有非空内部，则它也是闭锥，此时，我们说 Γ 是一个正则锥. Γ^* 叫作 Γ 的对偶锥. 当 $n=1$ 时，开锥就是半直线 $\{x\in E_1; x>0\}$ 和 $\{x\in E_1; x<0\}$. 当 $n=2$ 时，开锥就是两条交于原点且其夹角小于或等于 π 的射线间的角域. 这

种锥当且仅当两射线夹角严格小于π时是正则的.

当基为锥时,我们得到 H^2 空间函数的下述表示定理(比定理 2.3 的结果更强).

定理3.1 设 Γ 是一开锥,则 $F\in H^2(T_\Gamma)$当且仅当

$$F(z)=\int_{\Gamma^*} e^{2\pi iz\cdot t}f(t)\,dt, \tag{3.2}$$

其中,f 是 E_n 上一个可测函数,它满足条件:

$$\int_{\Gamma^*}|f(t)|^2dt<\infty.$$

此外,有
$$\|F\|_2\leqslant\left(\int_{\Gamma^*}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

因而,对应 $F\leftrightarrow f$ 是从 $H^2(T_\Gamma)$到 $L^2(\Gamma^*)$上的酉线性映射. 特别地,$H^2(T_\Gamma)$包含有非恒为0的函数当且仅当 Γ 是正则的.

证明 因 $y\in\Gamma$, $t\in\Gamma^*$ 时,$y\cdot t\geqslant0$,所以,由定理 2.3 可推知,当 F 有表示式(3.2)(其中 $f\in L^2(\Gamma^*)$)时,$F\in H^2(T_\Gamma)$.

反之,若 $F\in H^2(T_\Gamma)$,由定理 2.3 和(2.5),有

$$F(z)=\int_{E_n} e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt.$$

这里,
$$\|F\|_2^2=\sup_{y\in\Gamma}\int_{E_n} e^{-4\pi y\cdot t}|f(t)|^2dt.$$

我们来证明,在 Γ^* 的余集上,f 几乎处处为 0. 设 $t_0\notin\Gamma^*$,则存在 $y_0\in\Gamma$, 使 $y_0\cdot t_0<0$. 于是存在 t_0 的一个邻域 $N=N(t_0)\subset E_n-\Gamma^*$ 以及 $\delta>0$, 使得 $t\in N$ 时, 有 $y_0\cdot t<-\delta<0$. 因此,对 $t\in N$ 和正数 k,有$(ky_0)\cdot t<-k\delta$. 由于 $ky_0\in\Gamma$,我们还有

$$\int_N e^{-4\pi ky_0\cdot t}|f(t)|^2dt\leqslant\int_{E_n} e^{-4\pi k_0\cdot t}|f(t)|^2dt\leqslant\|F\|_2^2<\infty.$$

而这就推出,对一切 k,

$$\int_N e^{4\pi k\delta}|f(t)|^2dt\leqslant\|F\|_2^2<\infty.$$

由此显然可知,对 $N(t_0)$中几乎一切 t,有 $f(t)=0$. 从而,$f(t)=0$ 对 Γ^* 外的几乎一切 t 成立[4]. 定理 3.1 的其它部份获证. ▮

4) 这部份的证明类似于推论 2.6 相应部份的证明.

在古典情形中，当 F 属于与上半平面相伴的 H^2 空间时（即当基为正实数锥时），利用 F 的边界值，容易建立其 Cauchy 积分表示式

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{E_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3.3}$$

现在我们来证明，这个表示式可以推广到以 E_n 中的锥 Γ 为基的情形. 而且，这个表示式仅涉及到当 $y\in\Gamma$ 而趋向 Γ 顶点（即 E_n 之原点 0）时的边界值. 这些边界值在 L^2 意义下的存在性是定理 3.1 的简单推论：

推论 3.4 设 Γ 是 E_n 中的开锥，且 $F(x+iy)\in H^2(T_\Gamma)$. 则存在一个定义在 E_n 上的函数 $F(x)$，使当 $y\in\Gamma$ 趋向于 0 时，按 L^2 范数有 $F(x+iy)\to F(x)$.

证明 我们沿用定理 3.1 中的符号，令 $F(x)$ 是 f 的 Fourier 逆变换（可以认为 f 定义在 E_n 上，而在 Γ^* 外为 0）. 于是，形式地有

$$F(x)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi ix\cdot t}f(t)dt.$$

而(3.2)指出，$F(x+iy)$ 是 $e^{-2\pi y\cdot t}f(t)$ 的 Fourier 逆变换，于是，由于后者当 $y\to 0$ 时按 L^2 范数收敛于 $f(x)$，由 Plancherel 定理便推得所需的结论. 】

上面谈到的(3.3)式之推广，可以借助于与管域相关联的核函数 $K(z)$ 而得到：对 $z=x+iy\in T_\Gamma$，令

$$K(z)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi iz\cdot t}dt=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y\cdot t}\,dt^{5)}.$$

于是我们得到一个定义在 T_Γ 上的连续函数 K，称之为关于管 T_Γ 的 Cauchy 核. 又 K 作为 $x=\mathrm{Re}(z)$ 的函数必属于 $L^2(E_n)$，实际上，对一切 $y\in\Gamma$，由 Plancherel 定理可知

---

5) 当 Γ 是正实数锥时，$K(z)=-1/2\pi iz$，这时，(3.3)有

$$F(z)=\int_{E_1}K(z-\xi)F(\xi)\,d\xi$$

的形式. 定理 3.6 说明，对于基为锥 Γ 的一般的管 T_Γ 上的函数来说，此公式也是成立的.

(3.5) $$\int_{E_n}|K(x+iy)|^2dx=\int_{\Gamma^*}e^{-4\pi y\cdot t}dt=K(2iy)$$
(暂时把 $K(2iy)$ 看作是有限的).

定理3.6 若 $F\in H^2(T_\Gamma)$, 则对一切 $z\in T_\Gamma$, 有

$$F(z)=\int_{E_n}K(z-\xi)F(\xi)d\xi,$$

其中, $F(\xi)=\lim\limits_{\eta\to0,\eta\in\Gamma}F(\xi+i\eta)$ 是推论 3.4 中的极限函数.

证明 根据定理 3.1 和 3.4, 我们知道

$$F(z)=F(x+iy)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt.$$

这里, f 是 $F(\xi)=\lim\limits_{\eta\to0,\eta\in\Gamma}F(\xi+i\eta)$ 的 Fourier 变换. 就是说, f 是函数序列

$$f_k(t)=\int_{|\xi|<k}F(\xi)e^{-2\pi it\cdot\xi}d\xi,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

按 L^2 范数的极限. 再应用 Fubini 定理, 并考虑到 $K(x-\xi+iy)$ 作为 ξ 的函数属于 $L^2(E_n)$ (见(3.5)), 我们就得到

$$\begin{aligned}F(z)&=\lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma^*}e^{2\pi iz\cdot t}f_k(t)dt\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma^*}e^{2\pi iz\cdot t}\left\{\int_{|\xi|<k}F(\xi)e^{-2\pi it\cdot\xi}d\xi\right\}dt\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{|\xi|<k}F(\xi)\left\{\int_{\Gamma^*}e^{2\pi i(z-\xi)\cdot t}dt\right\}d\xi\\&=\int_{E_n}F(\xi)K(z-\xi)d\xi.\end{aligned}$$

于是定理得证. 】

在古典的一维情形中, Poisson 核

$$P(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

可以简单地用上半平面的 Cauchy 核表示: 即对 $z=x+iy$, $y>0$,

$$P(x,\ y)=|K(z)|^2/K(2iy).$$

因此, 只要定义了 Cauchy 核, 推广 Poisson 核的定义就是很自然的了. 设 T_Γ 是以正则锥为基的管, K 是相应的 Cauchy 核, 我们

如下定义 T_Γ 上的 Poisson 核：

$$\mathscr{P}(x, y)=|K(x+iy)|^2/K(2iy),\ z=x+iy\in\Gamma.$$

我们已经证明，作为 x 的函数，$K(x+iy)$属于 $L^2(E_n)$. 因此，对每个 $y\in\Gamma$，$\mathscr{P}(\cdot, y)$必定属于 $L^1(E_n)$. 此外，不难证明 $\mathscr{P}(\cdot, y)$属于 $L^\infty(E_n)$. 为了说明这一点，只需证明，对每个 $y\in\Gamma$，$K(x+iy)$有界而与 x 无关. 但是，因为

$$|K(x+iy)|=\left|\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+iy)\cdot t}\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t}dt=K(iy),$$

故只需证明当 $y\in\Gamma$ 时，$K(iy)$是有限的. 为此，首先证明，当 $y\in\Gamma$ 时，存在 $\delta=\delta_y>0$，对一切 Γ^* 中之 t，有 $\delta|t|\leqslant y\cdot t$. 我们只需对 $t\in\Gamma^*$，$|t|=1$ 的情形证明即可. 按照 Γ^* 的定义，我们知道 $0\leqslant y\cdot t$，而且等号不可能成立，否则因 Γ 是开集，必可找到一个绝对值充分小的 $u\in E_n$，使得 $y+u\in\Gamma$，且 $(y+u)\cdot t=u\cdot t<0$，此与 $t\in\Gamma^*$ 矛盾. 又因 Γ^* 与 E_n 中单位球面 Σ 的交是紧的，所以，根据 $0<y\cdot t$ 对一切 $t\in\Gamma^*\cap\Sigma$ 成立，可推出 $\delta_y>0$ 的存在. 于是，对 $y\in\Gamma$，有

$$\int_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t}\,dt\leqslant\int_{\Gamma^*} e^{-2\pi\delta|t|}\,dt<\infty.$$

再依据 $L^q(E_n)\supset L^1(E_n)\cap L^\infty(E_n)$，$1\leqslant q\leqslant\infty$[6)]，我们就有以下结果.

推论 3.7 当 $1\leqslant q\leqslant\infty$ 时，对每个 $y\in\Gamma$，有

$$\mathscr{P}(\cdot, y)\in L^q(E_n).$$

从而，当 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，对一切 $z=x+iy\in T_\Gamma$，

$$u(x+iy)=\int_{E_n} f(x-t)\mathscr{P}(t, y)\,dt$$

是有意义的. 如同在第一章中引入的 Poisson 积分一样，我们可以证明 $u(x+iy)$按 L^p 范数趋于 $f(x)$. 即

---

6) 若 $f\in L^1\cap L^\infty$，且 $1<q<\infty$，则

$$\int|f|^q=\int|f|^{q-1}|f|\leqslant\|f\|_\infty^{q-1}\|f\|_1<\infty.$$

$$(3.8)\qquad \lim_{y\to 0, y\in\Gamma}\int_{E_n}|u(x+iy)-f(x)|^p dx=0.$$

这是下述事实的一个直接结果：核 $\mathscr{P}$ 是一个恒等逼近（见第二章定理 2.1 证明末尾的脚注和后文中定理 5.6 证明的最后部份）. 这就意味着 $\mathscr{P}$ 要满足下述三条性质：

(i) $\mathscr{P}(x, y)\geqslant 0$;

(ii) $\int_{E_n}\mathscr{P}(x, y)dx=1$, 对一切 $y\in\Gamma$;

(iii) 若 $\delta>0$, 则当 $y\in\Gamma$ 趋于 0 时，有

$$\int_{|x|>\delta}\mathscr{P}(x, y)dx\to 0.$$

性质(i)显然成立. 性质(ii)可以从(3.5)两端被 $K(2iy)$ 除而得. 为了证明(iii)，只需找一个函数 ψ, 满足

(a) ψ 在 E_n 上连续，

(b) $\lim\limits_{y\in\Gamma, y\to 0}\int_{E_n}\mathscr{P}(x, y)\psi(x)dx=1$,

(c) 当 $x\neq 0$ 时，$|\psi(x)|<1$; 当 $|x|\to\infty$ 时，$\psi(x)\to 0$.

因为，如果这样的函数存在，那么，由(b)知

$$1=\lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{|x|<\delta}\psi(x)\mathscr{P}(x, y)dx+\int_{|x|>\delta}\psi(x)\mathscr{P}(x, y)dx\right\}.$$

而由(a), (c)知，若 $|x|>\delta$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使 $|\psi(x)|\leqslant 1-\varepsilon$. 于是（还要利用(i)和(ii)）有

$$\begin{aligned}1&\leqslant\lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{|x|<\delta}\mathscr{P}(x, y)dx+(1-\varepsilon)\int_{|x|>\delta}\mathscr{P}(x, y)dx\right\}\\&=\lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{E_n}\mathscr{P}(x, y)dx-\varepsilon\int_{|x|>\delta}\mathscr{P}(x, y)dx\right\}\\&=\lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{1-\varepsilon\int_{|x|>\delta}\mathscr{P}(x, y)dx\right\}.\end{aligned}$$

由此显然可知(iii)成立.

函数 ψ 的存在性，则是下面表示定理的一个简单推论.

定理 3.9 若 $F\in H^2(T_\Gamma)$, 则对一切 $z=x+iy\in T_\Gamma$, 有

$$F(z)=\int_{E_n}\mathscr{P}(x-t, y)F(t)dt.$$

证明 设 $w=u+iv$ 是 T_Γ 的一点. 那么, 当 $z\in T_\Gamma$ 时,

$$|K(z+w)|=\left|\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+u)\cdot t}e^{-2\pi(y+v)\cdot t}\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_{\Gamma^*} e^{-2\pi v\cdot t}\,dt=M_v<\infty.$$

于是, $F(z)K(z+w)$ 作为 z 的函数属于 $H^2(T_\Gamma)$, 且其范数不超过 $\|F\|M_v$. 因而可把定理 3.6 用到这个函数上, 得到

$$(3.10)\qquad F(z)K(z+w)=\int_{E_n} K(z-t)F(t)K(t+w)\,dt$$

对一切 $z\in T_\Gamma$ 成立.

如果令 $w=-x+iy$, 则 $K(z-t)K(t+w)=|K(z-t)|^2$, 且 $K(z+w)=K(2iy)$. 那么这时(3.10)等价于

$$F(z)=\int_{E_n} F(t)\{|K(z-t)|^2/K(2iy)\}dt$$

$$=\int_{E_n} F(t)\mathscr{P}(x-t,\ y)dt.$$

这就是我们所要的结论. 】

现在我们来构造 ψ. 选取连续函数 $\varphi\geqslant 0$, 其紧支集含于 Γ^* 内, 且 $\int_{E_n}\varphi(t)dt=1$(因 Γ 是正则的, 所以可以这样做). 我们断言

$$\psi(x)=\int_{E_n} e^{2\pi ix\cdot t}\varphi(t)dt=\int_{\Gamma^*} e^{2\pi ix\cdot t}\varphi(t)dt$$

满足(a), (b)及(c). 首先因为 $\varphi\in L^1(E_n)$, 所以性质(a)当然成立(参看第一章定理 1.1 之(b)). 其次当 $|x|\to\infty$ 时 $\psi(x)$ 趋于 0 是 Riemann–Lebesgue 定理的特殊情形. 而若 $|\psi(x)|=1$, 比如说 $\psi(x)=e^{2\pi i\theta}$, 则有

$$1=\int_{E_n} e^{2\pi i[(x\cdot t)-\theta]}\varphi(t)\,dt=\int_{E_n}\varphi(t)\cos 2\pi[(x\cdot t)-\theta]\,dt$$

(因 1 是实数, 所以第一个积分的虚部必为 0). 但若 $x\neq 0$, 那么 $\cos 2\pi[(x\cdot t)-\theta)]$ 作为 t 的函数, 在 φ 的支集内一个正测度子集上必严格小于 1. 这一事实连同 φ 的非负性以及 $\int_{E_n}\varphi(t)dt=1$ 的假定, 就可推知, 当 $x\neq 0$ 时, $|\psi(x)|<1$. 为了证明(b)成立, 我们

对 $z\in T_\Gamma$ 来考察

$$F(z)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi iz\cdot t}\varphi(t)dt.$$

依定理 3.1, F 属于 $H^2(T_\Gamma)$, 并且显然按 L^2 范数有

$$F(x)=\lim_{y\in\Gamma,y\to0}F(x+iy)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi ix\cdot t}\varphi(t)dt=\psi(x).$$

再根据 Lebesgue 控制收敛定理, 知

(3.11) $$F(0)=\lim_{y\in\Gamma,y\to0}F(0+iy)=\psi(0)=1.$$

对 F 应用定理 3.9, 便有

(3.12) $$\begin{aligned}F(x+iy)&=\int_{E_n}\mathscr{P}(x-t,\ y)F(t)dt\\&=\int_{E_n}\mathscr{P}(x-t,\ y)\psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

再由 $\mathscr{P}(-t,\ y)=\mathscr{P}(t,\ y)$, 连同(3.12)(当 $x=0$)和(3.11)就得出性质(b).

§4 Paley-Wiener 定理

这一节用来研究 H^2 空间理论的应用. 我们将阐明如何把古典的 Paley-Wiener 定理推广到 n 维, 并用本章已有的结果来证明它. 首先我们讨论一维的情形.

设 F 是复平面 C_1 上的整函数, 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个常数 A_ε, 使得对一切 $z\in C_1$, 有

$$|F(z)|\leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|},\quad \sigma>0,$$

则我们称 F 为 σ 指数型的. 可用下述方法得到这种函数的一个例子: 设 $f\in L^2(-\tau,\ \tau)$, 我们定义一个整函数 F:

$$F(z)=\int_{-\tau}^{\tau}f(t)e^{2\pi izt}dt,\ z\in C_1,$$

那么, $$\begin{aligned}|F(z)|&=|F(x+iy)|\\&\leqslant\sqrt{2\tau}\left(\int_{-\tau}^{\tau}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}e^{2\pi\tau|y|}\leqslant Ae^{2\pi\tau|z|}.\end{aligned}$$

因此，F 是 $\sigma=2\pi\tau$ 指数型的. Paley-Wiener 定理是说，如果 F 限制在实轴上是属于 $L^2(-\infty, \infty)$的，则上述事实的逆命题成立. 明确说来就是下述定理：

定理 4.1 设 $F\in L^2(-\infty,\infty)$，那么，F 是一个在$[-(\delta/2\pi), \delta/2\pi]=[-\tau, \tau]$ 之外为 0 的函数的 Fourier 变换的充分必要条件是，F 是一个 σ 指数型整函数在实轴上的限制.

我们刚才已经证明了定理的必要条件部份[7]. 充分条件部份要借助于下述 Phragmén-Lindelöf 型结果来建立(与第二章 5.2 比较).

引理 4.2 令 S 是 C_1 中两条射线所夹的角域，这两条射线交于原点，其夹角为 π/α. 设 f 在 $\bar{S}$ 上解析，且对 $0\leqslant\beta<\alpha$ 和 $z\in S$ 满足 $|f(z)|\leqslant A\exp\{|z|^\beta\}$. 那么，若在两条(边界)射线上有 $|f(z)|\leqslant M$，则必对一切 $z\in S$ 有 $|f(z)|\leqslant M$.

证明 我们可以假定两条射线与实轴之夹角为 $\pi/2\alpha$ 和 $-\pi/2\alpha$(否则可经旋转得到). 令 $F(z)=f(z)\exp\{-\varepsilon z^\gamma\}$，其中 $\beta<\gamma<\alpha$，$\varepsilon>0$. 由此得出，在两条边界射线上，有 $|F(z)|\leqslant|f(z)|\leqslant M$. 而且，在弧 $R=|z|=|re^{i\theta}|(-(\pi/2\alpha)\leqslant\theta\leqslant\pi/2\alpha)$上，有 $|F(z)|\leqslant A\exp\{R^\beta-\varepsilon R^\gamma\cos(\gamma\pi/2\alpha)\}$. 而当 $R\to\infty$ 时，上述最后的式子趋于 0. 那么，当 R 足够大时，在该弧上，有 $|F(z)|\leqslant M$. 于是根据最大模原理得知，对一切 $z\in\bar{S}$ 和 $|z|\leqslant R$，有 $|F(z)|\leqslant M$ 成立. 由于 R 可以选得任意大，所以对一切 $z\in\bar{S}$，$|F(z)|\leqslant M$ 成立. 因此，对一切 $z=re^{i\theta}\in\bar{S}$，有 $|f(z)|\leqslant M\exp\{\varepsilon r^\gamma\cos\gamma\theta\}$. 再令 $\varepsilon\to0$，就得到我们的结论. ▌

引理 4.3 设 F 是 σ 指数型的，且对实数 x，有 $|F(x)|\leqslant1$. 则 $|F(x+iy)|\leqslant\exp\{\sigma|y|\}$ 对一切复数 $z=x+iy$ 成立.

证明 对 $\varepsilon>0$，令 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{i(\sigma+\varepsilon)z}$. 因为 F 是 σ 指数型的，所以，对一切非负值 y，有

---

7) 按照第一章的记法，我们已经证明，如果 F 是一个在 $[-\tau, \tau]$ 外为 0 的函数 f 的 Fourier 逆变换，那么，它就是一个 σ 指数型函数在实数轴上的限制. 这显然等价于：有一个函数 F，它是函数 $g(g(t)=f(-t))$ 的 Fourier 变换.

$$|F_\varepsilon(iy)| = |F(iy)| e^{-(\sigma+\varepsilon)y} \leqslant A_\varepsilon.$$

又对实数 x, 也有 $|F_\varepsilon(x)| \leqslant 1$. 这就给出了 F 在正 x 轴和正 y 轴上的界. 而且,我们定能找到 B, 使得

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|-y)} \leqslant A_\varepsilon e^{2(\sigma+\varepsilon)|z|} \leqslant Be^{|z|^{3/2}}.$$

因此,应用引理 4.2, 并取 $\beta = \dfrac{3}{2} < 2 = \alpha$, 可得: 当 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ 时, 对一切 $z = x + iy$, 有

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant \max\{A_\varepsilon, 1\} = A.$$

若对第二象限重复这一论证, 我们就可取 $\beta = 0 < 1 < \alpha$, 并对限制在上半平面的 F_ε 应用引理 4.2, 从而得知对 $y \geqslant 0$, 有 $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$. 现在令 $\varepsilon \to 0$, 就有 ($y \geqslant 0$ 时) $|F(z)| = |F(x+iy)| \leqslant \exp\{\sigma y\}$. 再将此结果用于 $G(z) = F(-z)$, 便证得引理. 】

引理 4.4 设 F 是 σ 指数型的, 并且它在 x 轴上之限制有不超过 1 的 L^2 范数, 则对一切实数 y, 有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leqslant e^{\sigma|y|}.$$

证明 设 φ 是一个具有紧支集的单实变量有界函数, 且 $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$. 我们可以定义 $G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\varphi(t)dt$, 则 G 是解析的, 且对 $\varepsilon > 0$ 有

$$|G(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} e^{(\sigma+\varepsilon)|t|} |\varphi(t)| dt = B_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

那么, G 也是 σ 指数型的. 另外, 由 Schwarz 不等式推出,

$$|G(x)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

这样, 我们就可以对函数 G 应用引理 4.3, 而知对一切实数 y, 有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\varphi(t)\, dt\right| = |G(z)| = |G(x+iy)| \leqslant e^{\sigma|y|}. \tag{4.5}$$

再利用 Schwarz 不等式的逆, 并在(4.5)中对一切这样的 φ 取上确界, 便得引理 4.4. 】

现在我们可以来完成 Paley-Wiener 定理的证明了. 假设 F 是 σ 指数型的, 且其在实轴上的限制属于 $L^2(-\infty, \infty)$. 我们来

证明，这个限制的 Fourier 逆变换在区间 $[-(\sigma/2\pi),\ \sigma/2\pi]=[-\tau,\ \tau]$ 之外几乎处处为0. 不失一般性，我们可以假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx\leqslant 1.$$

令 $G_+(z)=e^{i\sigma z}F(z)$. 则利用引理 4.4 可知，当 $y\geqslant 0$ 时，有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|G_+(x+iy)|^2dx\right)^{1/2}=e^{-\sigma y}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant e^{-\sigma y}e^{\sigma y}=1.$$

于是，G_+ 属于上半平面的 H^2 空间 $H^2(T_{R^+})=H^2(E_2^+)$. 从上一节的结果(特别参看定理 3.1 和推论 3.4) 可以知道，存在一个在负轴上为0的函数 $g\in L^2(-\infty,\ \infty)$，使得对一切 $y>0$，满足

$$G_+(x+iy)=G_+(z)=\int_0^{\infty}g(t)e^{2\pi izt}\,dt.$$

令 $f(s)=g(\tau-s)=g[(\sigma/2\pi)-s]$，这个等式等价于：对一切 $y>0$，

$$F(z)=F(x+iy)=\int_{-\infty}^{\tau}f(s)e^{-2\pi izs}\,ds.$$

取上式在 $y=0$ 处的极限，我们就看出，$F(x)$的 Fourier 逆变换对几乎每个 $s\geqslant\tau$ 为0. 对 $F(-z)$进行同样的论证，可知它对几乎每个 $s\leqslant-\tau$ 也为0. 因而定理 4.1 得证. 】

现在，我们来把这一结果推广到 n 维的情形. 为此，我们首先需要找出指数型这一概念的适当推广. 为了这一目的，我们引入下列定义.

设 $\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|$ 是向量空间上的(实数或复数域上的) 二个范数. 我们说它们是等价的，如果存在两个常数 c_1、c_2，使得对一切非零向量 x，有 $0<c_1\leqslant\|x\|/|x|\leqslant c_2<\infty$ 成立. 众所周知，E_n 中的任何范数 $\|\cdot\|$ 都等价于欧氏范数 $|\cdot|$. 关于范数 $\|\cdot\|$ 的单位球指的是集合 $K=\{x\in E_n;\ \|x\|\leqslant 1\}$. 显然，$K$ 是凸的、紧的且对称的(即，若 $x\in K$，则必有 $-x\in K$). 当 E_n 的这种子集有非空内点时，则称之为对称体. 不难证明，$K\subset E_n$ 是一对称体当且仅当对于一个与欧氏范数等价的范数来说，K 是一个单位球.

设 K 是 E_n 的任一子集，则集合 $K^*=\{y\in E_n;$ 对一切 $x\in K$, $x\cdot y\leqslant 1\}$ 称为 K 的配极集. 例如，若对 $p\geqslant 1$, $K=\{x=(x_1,x_2)\in E_2;\ |x_1|^p+|x_2|^p\leqslant 1\}$, 则容易验证, $K^*=\{y=(y_1,\ y_2)\in E_2;\ |y_1|^q+|y_2|^q\leqslant 1\}$, 其中 $1=1/p+1/q$. 还易看出，若 K 是一对称体，则 K^* 也是对称体. 于是，若 K 对范数 $\|\cdot\|$ 成一单位球，那么，K^* 就是关于范数 $\|\cdot\|^*$ 的单位球，其中 $\|\cdot\|^*$ 称为范数 $\|\cdot\|$ 的对偶范数. 当然我们也可以等价地定义对偶范数为:

(4.6)
$$\|y\|^*=\sup_{x\in K}|x\cdot y|.$$

引理 4.7 设 $K\subset E_n$ 是凸的、闭的且 $0\in K$. 则 $K^{**}=(K^*)^*=K$.

证明 显然有 $K\subset K^{**}$. 于是我们只需证明，当 $x_0\notin K$ 时，$x_0\notin K^{**}$. 给定这样一点 x_0 后，选择 $y\in K$，使 $|y-x_0|$ 为最小. 这时，我们将 E_n 分成两个子集: $\{x\in E_n;\ x\cdot(x_0-y)>y\cdot(x_0-y)\}$ 和 $\{x\in E_n;\ x\cdot(x_0-y)\leqslant y\cdot(x_0-y)\}$. 由于 $x_0\cdot(x_0-y)-y\cdot(x_0-y)=|x_0-y|^2>0$, 所以 x_0 属于前一集合. 我们断言，K 必含于后一集中. 如若不然，必定存在 $y_1\in K$, 使 $(y_1-y)\cdot(x_0-y)>0$. 取 $\alpha<1$, 且满足 $0<\alpha<2(y_1-y)\cdot(x_0-y)/|y_1-y|^2$. 因为 K 是凸的，所以 $w=(1-\alpha)y+\alpha y_1\in K$. 因而

$$|w-x_0|^2=\alpha\{\alpha|y_1-y|^2-2(y_1-y)\cdot(x_0-y)\}+|y-x_0|^2<|y-x_0|^2.$$

此与 $|y-x_0|$ 为最小发生矛盾.

由于 $0\in K$, 从而 $y\cdot(x_0-y)\geqslant 0$. 于是我们能够找到一个正常数 ε, 使得 $x_0\cdot(x_0-y)>\varepsilon$; 同时对一切 $x\in K$ 有 $x\cdot(x_0-y)\leqslant\varepsilon$ (若 $y\cdot(x_0-y)>0$, 可选 $\varepsilon=y\cdot(x_0-y)$; 若 $y\cdot(x_0-y)=0$, 则可选任一正数 $\varepsilon<x_0\cdot(x_0-y)$). 令 $v=(x_0-y)/\varepsilon$, 这就意味着

$$K\subset\{x\in E_n;\ x\cdot v\leqslant 1\},\ 且\ x_0\cdot v>1.$$

而这说明 $v\in K^*$, 但 $x_0\notin K^{**}$. 于是引理得证. 】

应用这一结果和(4.6)式，我们得到:

(4.8)
$$\|x\|=\|x\|^{**}=\sup_{y\in K^*}|x\cdot y|.$$

若 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in \boldsymbol{C}_n$, 我们自然地推广(4.8)而给出 $\|z\|$的定义为:

(4.8′) $$\|z\|=\sup_{y\in K^*}|z\cdot y|=\sup_{y\in K^*}|z_1y_1+\cdots+z_ny_n|.$$

设 K 是一个对称体, 我们称 $\boldsymbol{C}_n$ 上的整函数 F 为 K 指数型的,是指对每个 $\varepsilon>0$, 存在常数 A_ε, 使得对一切 z, 有

$$|F(z)|\leqslant A_\varepsilon e^{2\pi(1+\varepsilon)\|z\|}.$$

我们把 K 指数型的函数类记作 $\mathscr{E}(K)$.

现在可以叙述 n 维的 Paley-Wiener 定理了.

定理 4.9 设 $F\in L^2(E_n)$, 那么, F 是某个在对称体 K 外为 0 的函数的 Fourier 变换, 当且仅当 F 是 $\mathscr{E}(K^*)$ 中的函数在 E_n 上的限制.

证明 如果 F 是 f 的 Fourier 变换, 且 f 在 K 外为 0. 那么容易验证,

(4.10) $$\begin{aligned}F(z)&=\int_{E_n}e^{-2\pi iz\cdot t}f(t)dt\\&=\int_K e^{-2\pi ix\cdot t}e^{2\pi y\cdot t}f(t)dt\end{aligned}$$

将 F 拓广成为 $\mathscr{E}(K^*)$中的一个函数. 事实上, 由(4.10)可立即推得

$$|F(z)|=|F(x+iy)|\leqslant Ae^{2\pi\|y\|^*}.$$

其逆命题可利用引理 4.4 的下述 n 维推广给出:

引理 4.11 设 $F\in\mathscr{E}(K^*)$, 则有

$$\left(\int_{E_n}|F(x+iy)|^2dx\right)^{1/2}\leqslant e^{2\pi\|y\|^*}\left(\int_{E_n}|F(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

我们来把这个不等式化为一维问题. 固定 E_n 中的一个点 $y\neq 0$, 令 e_1 是 E_n 中沿 y 方向的单位向量. 选取 E_n 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 取定 $(n-1)$ 个实数 $u_2, \cdots, u_n$, 令 $\alpha=\sum_{j=2}^n u_je_j$, 并定义

$$\varphi(w_1)=F(w_1e_1+\alpha).$$

显然, φ 是单复变量 $w_1=u_1+iv_1$ 的整函数, 而且容易看出, φ 是

$2\pi\|e_1\|^*$ 指数型的．事实上，给定 $\varepsilon>0$，由 $F\in\mathscr{E}(K^*)$ 就能断定存在一个常数 A_ε，使得

$$|\varphi(w_1)|\leqslant A_\varepsilon\exp\{2\pi\|w_1e_1+\alpha\|^*(1+\varepsilon)\}$$
$$\leqslant[A_\varepsilon\exp\{2\pi(1+\varepsilon)\|\alpha\|^*\}]e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\varepsilon)|w_1|}$$
$$=A'_\varepsilon e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\varepsilon)|w_1|}.$$

于是，根据引理 4.4，对一切 $v_1\in(-\infty,\infty)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u_1+iv_1)|^2du_1\leqslant e^{4\pi\|e_1\|^*|v_1|}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u_1)|^2du_1.$$

我们选取 v_1，使 $y=v_1e_1$，于是这个不等式就变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(iy+\sum_{j=1}^n u_je_j\right)\right|^2du_1\leqslant e^{4\pi\|y\|^*}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(\sum_{j=1}^n u_je_j\right)\right|^2du_1.$$

再将两端对 $u_2, u_3, \cdots, u_n$ 积分，就得到引理 4.11．】

我们现在可以来完成定理 4.9 的证明了．假设 F 是 $\mathscr{E}(K^*)$ 中的一个函数在 E_n 上的限制．为简单起见，我们把 $\mathscr{E}(K^*)$ 中的那个函数仍记为 F．由引理 4.11 知道，对一切有界基 B 来说，$F\in H^2(T_B)$．因而，依一般表示定理 2.3，必存在 f，使之对于一切 $z=x+iy\in T_B$，成立着

$$F(z)=\int_{E_n}e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt.$$

我们可以假定 $0\in B$，那么，Plancherel 定理保证了 $f\in L^2(E_n)$，且 $\|f\|_2^2=\int_{E_n}|F(x)|^2dx$．这样就得知 F 是 f 的 Fourier 逆变换(或者等价地说，是 $f(-t)$ 的 Fourier 变换)．若再证明 f 在 K 外几乎处处为 0，我们就证完了定理．为此，我们首先注意到，由 Plancherel 定理推出，对一切 $y\in E_n$，有

$$\int_{E_n}|F(x+iy)|^2dx=\int_{E_n}e^{-4\pi y\cdot t}|f(t)|^2dt$$

(因 B 可选得任意大)．于是，依引理 4.11 可知，对一切 $y\in E_n$，成立着

$$(4.12)\qquad \int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y\cdot t}dt\leqslant e^{4\pi\|y\|^*}\int_{E_n}|f(t)|^2dt.$$

我们说，这个不等式仅当 f 在 K 外几乎处处为 0 时才成立．因

为，对于 $t_0 \notin K$，根据引理 4.7，必存在 $y_0 \in K^*$，使得 $(t_0 \cdot y_0) < -1$（我们仍在应用"K^* 是对称的"这一事实）．因此，显然可以找到一个 $\delta > 0$，和 t_0 的一个邻域 $N = N(t_0)$，使得对一切 $t \in N$，都成立着 $(t \cdot y_0) < -(1+\delta)$．那么，由(4.12)知，对于 $y = \rho y_0 (\rho > 0)$，有

$$\int_N |f(t)|^2 e^{4\pi\rho(1+\delta)} dt \leqslant \int_N |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt$$
$$\leqslant \|f\|_2^2 e^{4\pi\rho\|y_0\|^*}.$$

由于 $y_0 \in K^*$，故定有 $\|y_0\|^* \leqslant 1$．于是对一切 $\rho > 0$，我们得到

$$\left(\int_N |f(t)|^2 dt\right) e^{4\pi\rho(1+\delta)} \leqslant \|f\|_2^2 e^{4\pi\rho}.$$

假如 $\int_N |f(t)|^2 dt$ 不为 0，则势必得出

$$e^{4\pi\rho\delta} \leqslant \|f\|_2^2 \Big/ \int_N |f(t)|^2 dt,$$

而当 ρ 很大时，这显然是不可能的．这说明对几乎一切 $t \in N$，有 $f(t) = 0$．定理得证．】

§5 H^p 空间理论

到目前为止，我们考虑的几乎都是定义在管上、属于 H^2 的解析函数的性质．尤其只是考虑它们的 L^2 边界值的存在性．这一节中，我们将导出点态极限和 L^p 极限($p > 0$)（当逼近基的边界点时）的存在性的一些结果．

首先，我们考查管 T_Γ 的一个特殊情形——Γ 是第一卦限：

$$\Gamma = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in E_n; y_1 > 0, \cdots, y_n > 0\}.$$

显然，Γ 是一个锥，且 $\Gamma^* = \overline{\Gamma}$．那么，$T_\Gamma$ 上的 Cauchy 核就是

$$K(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{2\pi i(z_1 t_1 + z_2 t_2 + \cdots + z_n t_n)} dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$
$$= \prod_{j=1}^n \frac{-1}{2\pi i z_j},$$

其中，$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in T_\Gamma$．这就是说，$K(z)$ 是 n 个上半平面的一维 Cauchy 核的乘积．因而，Poisson 核 $\mathscr{P}(x, y)$（参看推论

3.7 及在此之前的讨论)就是 n 个一维 Poisson 核的乘积:

$$\mathscr{P}(x,\ y)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\ \frac{y_j}{x_j^2+y_j^2},\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n>0.$$

这个核正是第二章 § 3 中研究过的累次 Poisson 核的特殊情形(参看定理 3.22、推论 3.23 以及这些结果以前的一些内容). 若把点 $z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)\in T_\Gamma$ 的分量 $z_j=x_j+iy_j$ 视为与序偶 $(x_j,\ y_j)$ 相同, 我们就可以认为 T_Γ 是 n 个二维实欧氏空间上半平面的笛卡儿积 $E_2^+\times E_2^+\times\cdots\times E_2^+$. 那么, 下述说法与第二章 § 3 中给出的定义是一致的:

(i) 定义在 T_Γ 上的函数 u, 如果对每个 n 重正实数组 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$, 当点 $\zeta=(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2;\ \cdots;\ \xi_n,\ \eta_n)$ 在 $\gamma_\alpha(x)=\Gamma_{\alpha_1}(x_1)\times\Gamma_{\alpha_2}(x_2)\times\cdots\times\Gamma_{\alpha_n}(x_n)\subset T_\Gamma$[8] 内部趋向于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1,\ 0;\ x_2,\ 0;\ \cdots;\ x_n,\ 0)$ 时, $u(\zeta)=u(\xi+i\eta)=u(\xi_1+i\eta_1,\ \cdots,\ \xi_n+i\eta_n)$ 趋于 l, 则就在 $x\in E_n$ 处按各变量有非切向极限 l.

(ii) 如果对每个 n 重正实数组 α, 在 $\gamma_\alpha(x)\cap\{\xi+i\eta\in T_\Gamma;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots, \eta_n\leqslant 1\}$ 内上述函数 u 是有界的, 则称 u 在 $x\in E_n$ 处按各变量非切向有界.

对于 $H^p(T_\Gamma)(p>0)$ 中的函数来说, 当我们在第一卦限内逼近原点时, 其点态极限和依范数的极限是存在的. 事实上, 我们可以证明下列结果:

定理 5.1 设 Γ 是 E_n 的第一卦限, $F\in H^p(T_\Gamma)$, $p>0$, 则

(a) 在 E_n 的几乎一切 x 处, F 按各变量有非切向极限 $F(x)$. 特别地, 对几乎一切 $x\in E_n$, 有

$$\lim_{y\in\Gamma, y\to 0} F(x+iy)=F(x).$$

(b) 当 $y\in\Gamma$ 趋于 $0\in E_n$ 时,

$$\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x)|^p dx \text{ 趋于 } 0.$$

证明 固定 $(\zeta_2, \cdots, \zeta_n)=(\xi_2+i\eta_2, \cdots, \xi_n+i\eta_n)$, $\eta_2, \cdots, \eta_n>0$,

---

8) 我们使用了第二章 § 3 中的记号:

$$\Gamma_{\alpha_j}(x_j)=\{(\xi_j,\ \eta_j)\in E_2^+;\ |\xi_j-x_j|<\alpha_j\eta_j\},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

并且对于上半平面 E_2^+ 中的 $\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$，考察单复变量函数 $g(\zeta_1)=F(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$，首先证明 g 属于 $H^p(E_2^+)$. 由于 $|F(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|^p$ 作为 $\zeta_2=\xi_2+i\eta_2$ 的函数是次调和的(见第二章§4例(3)和(5.1))，记 $w_2=u_2+iv_2$，我们有

$$|F(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|^p\leqslant\frac{1}{\pi\eta_2^2}\int_{|w_2-\zeta_2|<\eta_2}|F(\zeta_1, w_2, \cdots, \zeta_n)|^p du_2dv_2$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi\eta_2^2}\int_0^{2\eta_2}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\zeta_1, w_2, \cdots, \zeta_n)|^p du_2dv_2.$$

对 $\zeta_3, \cdots, \zeta_n$ 重复这一论证，便得到

$$|F(\zeta)|^p\leqslant\pi^{1-n}(\eta_2\cdots\eta_n)^{-2}$$
$$\times\int_0^{2\eta_n}\cdots\int_0^{2\eta_2}\left(\int_{E_{n-1}}|F(\zeta_1, w_2, \cdots, w_n)|^p du_2\cdots du_n\right)dv_2\cdots dv_n.$$

把这个不等式两端对 ξ_1 积分，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\xi_1+i\eta_1)|^p d\xi_1$$
$$\leqslant\pi^{1-n}(\eta_2\cdots\eta_n)^{-2}\int_0^{2\eta_n}\cdots\int_0^{2\eta_2}\left(\int_{E_n}|F(u+iv)|^p du\right)dv_2\cdots dv_n$$
$$\leqslant\pi^{1-n}(\eta_2\cdots\eta_n)^{-2}\|F\|_p^p(2\eta_2\cdots2\eta_n)=A_1<\infty.$$

这就说明 g 属于 $H^p(E_2^+)$.

对于 T_Γ 中的 $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$，令 $s(\zeta)=|F(\zeta)|^{p/2}$，那么，上述不等式可以用函数 s 来表示：

$$\int_{-\infty}^{\infty}[s(\xi_1+i\eta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)]^2d\xi_1$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\xi_1+i\eta_1)|^p d\xi_1\leqslant A_1<\infty.$$

由于 $s(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 在其它变量保持不变时是 ζ_1 的次调和函数，所以这个不等式连同第二章(4.12)就保证了对一切 $\varepsilon_1>0$，有

$$s(\xi_1+i[\varepsilon_1+\eta_1], \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(t_1+i\varepsilon_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)\frac{\eta_1}{(\xi_1-t_1)^2+\eta_1^2}dt_1.$$

对 $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 进行同样的论证，得知对一切 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\in\Gamma$，有

(5.2) $s(\xi+i[\varepsilon+\eta])=s(\xi_1+i[\varepsilon_1+\eta_1],\cdots,\xi_n+i[\varepsilon_n+i\eta_n])$

$$\leqslant\int_{E_n}s(t+i\varepsilon)\mathscr{P}(\xi-t,\eta)dt.$$

令 $f_\varepsilon(t)=s(t+i\varepsilon)$, $\varepsilon\in\Gamma$, 则当 F 属于 $H^p(T_\Gamma)$时，函数族 $\{f_\varepsilon\}$ 是按 L^2 范数一致有界的（实际上，$\|f_\varepsilon\|_2^2\leqslant\|F\|_p^p$）. 于是，由 $L^2(E_n)$中单位球的弱紧性，我们可以找到一个趋向 $0\in E_n$ 的序列 $\{\varepsilon^{(k)}\}$, 使函数列 $\{f_{\varepsilon^{(k)}}\}$ 在 $k\to\infty$ 时弱收敛于 $L^2(E_n)$中的函数 f. 在(5.2)中，令 $\varepsilon=\varepsilon^{(k)}$ 并让 $k\to\infty$, 就得到

(5.3) $$s(\xi+i\eta)\leqslant\int_{E_n}f(t)\mathscr{P}(\xi-t,\eta)dt=m(\xi+i\eta).$$

因为 $m(\xi+i\eta)$是 $L^2(E_n)$中的一个函数的累次 Poisson 积分，所以，它在几乎每个 $x\in E_n$ 处按各变量非切向有界（见第二章推论 3.23 下面的论证）. 由(5.3)知，同样的结论必定对 $s(\xi+i\eta)=|F(\xi+i\eta)|^{p/2}$ 也成立. 因此，对 F 的实部和虚部应用第二章的定理 3.24, 就可得出定理 5.1 的(a).

现在很容易证明(b)了. 如果设 $Mf=M^{(n)}M^{(n-1)}\cdots M^{(1)}f$ 是相应于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一维极大函数的 n 次复合[9]，那么，当 $f\in L^2(E_n)$时，对一切 $x+iy\in T_\Gamma$, 有 $m(x+iy)\leqslant A(Mf)(x)$, 其中, A 是不依赖于 $y\in\Gamma$ 的常数（见第二章定理 3.22 前的论述）. 于是，由(5.3)，有

(5.4) $$|F(x+iy)|^p\leqslant\{A(Mf)(x)\}^2.$$

由于证明了(a)，我们已经知道 $\lim\limits_{y\in\Gamma,y\to0}|F(x+iy)-F(x)|=0$ 几乎处处成立；从而由(5.4)可知，其收敛性几乎处处由$\{(Mf)(x)\}^2$ 的常数倍来控制. 即：

$$|F(x+iy)-F(x)|^p\leqslant2^p(|F(x+iy)|^p+|F(x)|^p)$$
$$\leqslant2^{p+1}\{A(Mf)(x)\}^2.$$

因 $f\in L^2(E_n)$, 故由第二章(3.20)知，$Mf\in L^2$. 从而(b)是 Lebesgue 控制收敛定理的一个直接结果. ▌

9) 若 g 是 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数，则对于 $1\leqslant j\leqslant n$,

$$(M^{(j)}g)(x)=\sup_{r>0}(2r)^{-1}\int_{|t|<r}|g(x_1,\cdots,x_j-t,\cdots,x_n)|dt.$$

我们现在来给出这个定理的一些推论. 首先, 假设 Γ 是 n 条交于原点的线性独立射线的凸包的内部. 在这些射线的方向上选定向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则可将 Γ 表成开锥 $\{v=v_1a_1+\cdots+v_na_n\in E_n; v_1>0, \cdots, v_n>0\}$. 此时, 定理 5.1 对 $H^p(T_\Gamma)$ 中的函数 F 必成立. 为了说明这一点, 我们考虑一个把标准基向量 e_j 映到 a_j, $j=1, 2, \cdots, n$, 上的线性变换 A. 这时, A 把第一卦限映到 Γ 上. 再把 A 线性地扩张到 C_n 上, 并对基在第一卦限中的管中之 z, 令 $G(x+iy)=G(z)=F(Az)=F(Ax+iAy)$, 我们就得到

$$\int_{E_n}|G(x+iy)|^p dx=\frac{1}{|\det A|}\int_{E_n}|F(u+iAy)|^p du$$

$$\leqslant\frac{1}{|\det A|}\|F\|_p^p,$$

对一切第一卦限中的 y 成立. 于是 G 满足定理 5.1 的假设. 而这显然可推出极限 $F(u)=\lim\limits_{v\in\Gamma, v\to 0}F(u+iv)$ 的几乎处处存在性, 以及相应的按 L^p 范数的极限的存在性.

更一般地说, 如果 Γ 是有限多条交于原点之射线的凸包的内部, 而且在这有限条射线中, 我们至少可以找出 n 条是线性独立的, 则称 Γ 为**多角形锥**. 一个多角形锥显然是有限多个上段所述的那种锥的并. 从而, 若考虑以多角形锥为基之管上的 H^p 函数, 那么, 当逼近原点时, 其点态极限和依范数极限也是存在的.

根据以上讨论, 容易导出以下定理:

定理 5.5 设 Γ 是 E_n 中的开凸锥, $F\in H^p(T_\Gamma)$, $p>0$. 若 Γ_1 是任意一个锥, 其闭包含于 $\Gamma\cup\{0\}$ 之中, 则

(a) 对几乎一切 $x\in E_n$, $\lim\limits_{y\in\Gamma_1, y\to 0}F(x+iy)=F(x)$ 存在;

(b) 当 $y\in\Gamma_1$ 趋于 0 时, $\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x)|^p dx\to 0$.

证明 显然, 我们只需证明能找到一个多角形锥 Γ_0, 使得 $\overline{\Gamma}_1\subset\Gamma_0\cup\{0\}\subset\Gamma\cup\{0\}$. 为此, 我们考虑 $\overline{\Gamma}_1$ 与单位球面 $\Sigma_{n-1}\subset E_n$ 的交, 并记作 S. 对于每个 $x\in S$, 定可找到一个开多角形锥 Γ_x, 使 $x\in\Gamma_x\subset\Gamma$. 因 S 是紧的, 所以有限个这种锥 $\Gamma_{x_1}, \cdots, \Gamma_{x_m}$

就可覆盖 S. 记 Γ_0 是这 m 个锥的并集之凸包，于是显然可得我们所要的结论：$\overline{\Gamma}_1\subset\Gamma_0\cup\{0\}\subset\Gamma\cup\{0\}$. 】

在本章§2(紧接定理 2.11)中，我们曾经引入了两个概念：在逼近管 T_B 之基 B 的边界点时，函数的限制极限和非限制极限. 引用这样的术语，根据刚才的证明，定理 5.5 还可写成一个等价形式：

定理 5.5′ 若 $F\in H^p(T_\Gamma)$, $p>0$, 则在 Γ 内逼近 0 时，$F(z)$ 几乎处处有限制极限和依 L^p 范数的极限.

刚才的证明还表明，只要 $F\in H^p(T_\Gamma)$, F 就对几乎每个 x^0, 有非切向限制极限. 该极限的意义是：对 Γ 的任一真子锥 Γ_1 及任一笛卡儿积锥 $\gamma_\alpha(x^0)$ 来说，当 $y\in\Gamma_1$ 且 $x+iy\in\gamma_\alpha(x^0)$, $x+iy\to x^0$ 时，$F(x+iy)$ 的极限存在.

借助于管 T_Γ 上的 Poisson 核 $\mathscr{P}(x,y)$, 可以证明，在 $p\geqslant1$ 时，有依范数的非限制极限. 更确切地说，我们将证明下述结果成立：

定理 5.6 设 Γ 是 E_n 中的正则开凸锥，$F\in H^p(T_\Gamma)$, $1\leqslant p<\infty$, 则

$$\lim_{y\in\Gamma,\,y\to0}\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x)|^p\,dx=0,$$

其中，$F(x)$ 是极限函数，其存在性是由前面的定理保证的.

证明 我们首先证明 Poisson 核 $\mathscr{P}(x,y)$ 有下列“半群性质”[10]：对于 $F\in H^p(T_\Gamma)$ 及 y_1、$y_2\in\Gamma$, 有

$$F(x+i(y_1+y_2))=\int_{E_n}F(t+iy_2)\mathscr{P}(x-t,\,y_1)\,dt. \tag{5.7}$$

在 $p=2$ 时，这是定理 3.9 的直接推论. 一般说来，由引理 2.12 可推知，(当 $p>0$ 时) $G(x+iy)=F(x+i(y_1+y_2))$ 在 T_Γ 内一致有界. 现设 φ 是一个连续的非负函数，它的紧支集含于 Γ^* 中，且 φ

---

10) 由第一章推论 1.28 容易看出，当 u 是 E^+_{n+1} 上的调和函数，并且对一切 $y>0$, 有 $\|u(\cdot,y)\|_p\leqslant c<\infty$ 时，$u(x,y_1+y_2)=\int_{E_n}u(t,y_2)P(x-t,y_1)\,dt$ 成立. 在目前情况下，我们必须限制 F 是全纯函数，因为一般来说，核 $\mathscr{P}$ 不一定能导出调和函数(也不能是多重调和函数).

满足$\int_{E_n}\varphi(t)dt=1$(这样的φ是存在的，因为Γ是正则的)．令$\psi(z)=\int_{E_n}e^{2\pi i z\cdot t}\varphi(t)dt$,则定理3.1保证了$\psi\in H^2(T_\Gamma)$．因而,对一切$\varepsilon>0$, $G_\varepsilon(z)=\psi(\varepsilon z)G(z)\in H^2(T_\Gamma)$．于是根据定理3.9便有

$$G_\varepsilon(x+iy)=\int_{E_n}G_\varepsilon(t)\mathscr{P}(x-t,\ y)dt. \tag{5.8}$$

此外，还知$|\psi(z)|\leqslant\int_{\Gamma^*}e^{-2\pi y\cdot t}\varphi(t)dz\leqslant 1$和$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon z)=1$．这些结果连同$\mathscr{P}(\cdot,\ y)\in L^q(E_n)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$(见3.7)，使我们可以对(5.8)的两端取$\varepsilon\to 0$时的极限,从而得到

$$G(x+iy)=\int_{E_n}G(t)\mathscr{P}(x-t,\ y)dt.$$

若视$y=y_1$,那么这正是我们所要证的性质(5.7)．

现在，让y_2有限制地趋向于0，那么，定理5.5的(b)就能保证,对一切$y\in\Gamma$,有

$$F(x+iy)=\int_{E_n}F(t)\mathscr{P}(x-t,\ y)dt. \tag{5.9}$$ △

所余部分的证明类似于第二章定理1.10，且是以核$\mathscr{P}$的性质(i),(ii)和(iii)为基础的,这些性质是在(3.8)后面给出的[11]．令$\omega(r)$表示F的连续模．顺次应用(ii)、Minkowski的寻常不等式继之以积分不等式以及(i)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x)|^p dx\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{E_n}\left|\int_{E_n}\{F(x-t)-F(x)\}\mathscr{P}(t,\ y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}\\&\leqslant\left(\int_{E_n}\left|\int_{|t|<\delta}\{F(x-t)-F(x)\}\mathscr{P}(t,\ y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}\\&\quad+\left(\int_{E_n}\left|\int_{|t|>\delta}\{F(x-t)-F(x)\}\mathscr{P}(t,\ y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

11) 实际上,我们现在给出的证明,可以用来证明(3.8)式。

$$\leqslant \int_{|t|\leqslant\delta}\left(\int_{E_n}|F(x-t)-F(x)|^p dx\right)^{1/p}\mathscr{P}(t,\ y)dt$$

$$+\int_{|t|>\delta}\left(\int_{E_n}|F(x-t)-F(x)|^p dx\right)^{1/p}\mathscr{P}(t,\ y)dt$$

$$\leqslant\{\sup_{|t|\leqslant\delta}\omega(|t|)\}\int_{E_n}\mathscr{P}(t,\ y)dt+2\|F\|_p\int_{|t|>\delta}\mathscr{P}(t,\ y)dt.$$

因由性质(ii)，$\int_{E_n}\mathscr{P}(t,\ y)dt=1$，第一项等于 $\sup_{|t|\leqslant\delta}\omega(|t|)$，所以当 δ 足够小时，该项小于某个数，譬如说，小于 $\varepsilon>0$(见第一章定理 1.18 的证明). 选好这样的 δ 后，性质(iii)就保证了当 y 在 Γ 内部趋向原点时，上式后一项趋于 0. 于是，当 $y\in\Gamma$ 并接近于 0 时，有 $\left(\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x)|^p dx\right)^{1/p}<\varepsilon$. 这就证明了定理. 】

§6 进一步的结果

6.1 本章的大部份内容，都只是讨论以开凸锥 B 为基的管上的情况，在 §2 里，我们证明了，如果 B 只是开的和连通的，那么，若 $F\in H^2(T_B)$，则 F 必在管 T_B 的凸包 T_{B^c} 上有一个解析开拓 G，并且 $G\in H^2(T_{B^c})$，$\|F\|_2=\|G\|_2$(见推论 2.4). 这个事实以及本章 §2 的大部分结果，都是基本表示定理(定理 2.3)的简单推论. 至于我们只考虑凸的基，还有许多其它理由. 有一个古典的事实：只要 F 在以开连通集 B 为基的 T_B 上全纯，则 F 必有一个到 T_{B^c} 上的解析开拓 G (见 Bochner 和 Martin [1] 的第五章定理 9). 易知，G 只能取 F 取到过的值，否则，假设 z_0 是在 G 的值域中而不在 F 的值域中，那么，我们就会有一个 T_B 上的全纯函数 $1/(F-z_0)$，它可以经解析开拓而得到在 T_{B^c} 上的扩张 $1/(G-z_0)$. 这显然是不可能的.

这些事实可以用来给出推论 2.4 的另一种证明，这种证明能把相应的结果推广到 H^p 空间，假如 $F\in H^2(T_B)$，$h\in L^2(E_n)$，且

$\int_{E_n}|h(t)|^2dt=1$. 对于 $z\in T_B$, 我们令

$$f(z)=f(x+iy)=\int_{E_n}F(x+t+iy)h(t)dt.$$

于是得到一个 T_B 上的全纯函数 f. 由 Hölder 不等式知, $|f(z)|\leqslant\|F\|_2\|h\|_2=\|F\|_2$. 如果 G 是 F 到 T_{B^c} 上的解析开拓, 则 $g(z)=\int_{E_n}G(z+t)h(t)dt$ 显然是 f 到 T_{B^c} 上的一个解析扩张[12]. 这样, 从前面的论述可知, 对一切 $z\in T_{B^c}$, 必有 $|g(z)|\leqslant\|F\|_2$. 继而, 选取 h, 使

$$g(z)=\int_{E_n}G(z+t)h(t)dt=\left(\int_{E_n}|G(z+t)|^2dt\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_{E_n}|G(t+iy)|^2dt\right)^{1/2},$$

就有 $G\in H^2(T_{B^c})$, 且 $\|G\|_2\leqslant\|F\|_2$. 如果 $p\geqslant1$, $\|h\|_q=1$, 其中 $(1/p)+(1/q)=1$, 则同理可证 $F\in H^p(T_B)$ 的解析开拓 G 属于 $H^p(T_{B^c})$, 且 $\|G\|_p=\|F\|_p$. 这个结论实际上对所有 $p>0$ 的情形都成立, 但其证明要更困难些. 它要用到这样的事实: 当 $F\in H^p(T_B)$, $p>0$ 时, $\log\|F(\cdot+iy)\|_p$ 是 $y\in B$ 的凸函数.

6.2 H^2 理论还有另外一个应用(特别是定理 2.3 的应用)如下:

设 B^+ 是 E_n 的一个开凸子集, 0 为其边界点, $B^-=\{x\in E_n;-x\in B^+\}$. 设存在两个函数 $F^+\in H^2(T_{B^+})$ 和 $F^-\in H^2(T_{B^-})$, 使得

$$F^+(x+i0)=\lim_{y\in B^+,y\to0}F^+(x+iy)$$
$$=\lim_{y\in B^-,y\to0}F^-(x+iy)=F^-(x-i0)$$

几乎处处成立(这些极限按(2.8)所述的意义来理解). 那么, 存在一个解析函数 F, 它定义在以 $B^+\cup B^-$ 的凸包为基的管上, 使得当

12) 不难证明, 后一积分是有意义的. 如同引理 2.12 那样, 先考虑一个子集 $B_0\subset B$, 我们可以假定 F 有界, 因而 G 有界. 那么, 在 $L^1(E_n)\cap L^2(E_n)$ 中取 h, 就保证了 $G(z+t)h(t)$ 是可积的. 这足以保证实现我们的目的.

$z\in T_{B^+}$ 时, $F(z)=F^+(z)$, 而当 $z\in T_{B^-}$ 时, $F(z)=F^-(z)$.

为说明这一点, 我们首先注意到, 从定理 2.3 可知, 存在两个函数 f^+ 和 f^-, 使得

$$F^+(z)=\int_{E_n} e^{2\pi iz\cdot t}f^+(t)dt,$$

$$F^-(z)=\int_{E_n} e^{2\pi iz\cdot t}f^-(t)dt.$$

由此得知 f^+ 和 f^- 都是 $F^+(x+i0)(=F^-(x-i0))$ 的 Fourier 变换(参看与(2.8)有关的讨论). 因此 $f^+(t)=f^-(t)$ 几乎处处成立. 令 $f(t)$ 几乎处处等于 $f^\pm(t)$, 并利用

$$S=\left\{y\in E_n;\ \int_{E_n}|f(t)|^2e^{-4\pi y\cdot t}dt\leqslant M^2<\infty\right\}$$

是凸集(见推论 2.4 的证明), 我们知道, $F(z)=\int_{E_n}e^{2\pi iz\cdot t}f(t)dt$ 在 T_S 上是解析的(这里 T_S 是一个集合, 它包含以 $B^+\cup B^-$ 的凸包为基的管), 并且 $F(z)$ 在 T_{B^+} 上与 $F^+(z)$ 重合, 在 T_{B^-} 上与 $F^-(z)$ 重合.

至于有关的结果和各种推广, 可参看 Streater 和 Wightman[1].

6.3 定理 2.11 可推广到三维的情形. 其结论可以叙述如下(见 E. M. Stein, G. Weiss, 和 M. Weiss[1]):

设 y_0 在开凸集 $B\subset E_3$ 的边界 ∂B 上, 那么, y_0 是一个非限制 L^2 收敛的点(即, 对一切 $F\in H^2(T_B)$, $\lim\limits_{y\to y_0, y\in B}F(x+iy)$ 在 L^2 意义下存在)的充分必要条件是: 存在位于 $\bar{B}$ 中的"顶点"的有限集合 $V=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 和 y_0 的一个邻域 N, 只要 $y\in N\cap\partial B$, 且 π_y 是在 y 处的支柱的平面, 则 π_y 至少包含 V 的一个元素.

这个条件并不是一个局部性条件, 例如, 当 B 是一个圆锥时, 这个结果表明, ∂B 的每个点都是非限制 L^2 收敛的点. 然而, 要是截掉圆锥顶点的一个邻域, 所余的边界点就不再是非限制收敛的点.

如何把这个结果推广到更高维, 还是一个没有解决的问题.

6.4 如果 F 在上半平面 $E_2^+=\{z=x+iy; y>0\}\subset \boldsymbol{C}_1$ 上是全纯的，那么，除去 x 轴上一个线性 Lebesgue 零测度点集外，有以下事实成立：或者 F 在 $(x_0, 0)$ 处有非切向极限，或者 F 把每个三角形域 $\Delta(x_0; \alpha, \beta)=\{x+iy\in E_2^+; \ |x-x_0|<\alpha y<\beta\}$ 稠密地映入复平面. 这是古典的 Plessner[1] 结果的一个特殊情形，它易从第二章定理 3.19 取 $n=1$ 时的特殊情形导出. 类似地，第二章定理 3.24 给出 Plessner 结果对 n 维的一个推广（见 Calderón[4]）：设 Γ 是第一卦限，如果 F 在 T_Γ 中是全纯的，那么，除 E_n 的一个零测度子集外，或者 F 在 $x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 处按各变量有非切向极限，或者它把每个笛卡儿积 $\Delta(x_0; \alpha, \beta)=\Delta(x_1^0; \alpha_1, \beta_1)\times\cdots\times\Delta(x_n^0; \alpha_n, \beta_n)$ 稠密地映入复平面，此处，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 属于 Γ. 由此，若 T_Γ 上全纯函数 $F=u+iv$ 的实部在集 $S\subset E_n$ 中的点处按各变量有非切向极限的话，那么 F 的虚部在 S 的几乎每个点处也有这样的极限. 这是因为，如果 u 在 x 处按各变量有非切向极限，F 就不能把 $\Delta(x; \alpha, \beta)$ 映入 $\boldsymbol{C}_1$ 的一个稠子集.

6.5 人们还研究过另外一些限制收敛的概念. 为简单起见，设 Γ 是 E_2 的第一象限，u 是 T_Γ 上的一个函数. 如果当 $t\to 0$ 时，$u(x_0+iy(t))\to u(x_0)$，我们称 u 在 $x_0\in E_2$ 有限制曲线极限 $u(x_0)$，其中，曲线 $y(t)=(h(t), k(t))(t\geqslant 0)$ 是连续的，且函数 h 和 k 是严格增加趋向 ∞ 的，同时 $h(0)=0=k(0)$[13]. 我们已经指出（见第二章(5.7)），L^1 函数 f 的累次 Poisson 积分 $u(x+iy)$ 不一定对几乎每个 $x\in E_2$ 都有非限制极限. 然而，可以证明，在刚才引入的限制曲线收敛的意义下，$u(x+iy)$ 是几乎处处收敛于 $f(x)$ 的. 这一点可以从 Zygmund[1], Vol. 2 给出的证明做适当修改而得到. 我们还可以把限制收敛的概念推广到以一般锥为基的管上，

13) 更一般地说，我们可以考虑按各变量非切向限制曲线极限——当 $x+iy(t)$ 在区域 $\gamma_\alpha(x_0)$ 内部趋向 x_0 时的极限，其中 $\gamma_\alpha(x_0)$ 是在 §5 开始时引入的. 这里，读者不要把非切向（或切向）趋于 x_0（在 T_Γ 内部）与 $y=y(t)$ 非切向（或切向）趋于 0（在 Γ 内部）相混. 为简单起见，我们在此牺牲了一般性而只考虑了二维情形，而这些概念在 n 维情形中有着自然的推广.

从而得到定理 5.5′ 的另一种陈述.（关于这一点，可参看定理 5.5′ 下面的评述.）§2 中构造的反例表明，管的基若不是锥的话，情况会是相当复杂的. 关于以锥为基的限制收敛的一个更加恰当的说明，可参看下文 6.8 中的例子.

6.6 定理 5.1 说，只要 Γ 是第一卦限，且 $F\in H^p(T_\Gamma)$，$p>0$，就对几乎一切 $x\in E_n$，存在非限制极限

$$\lim_{y\in\Gamma, y\to 0} F(x+iy)=F(x).$$

第二章推论 3.23 保证了当 $p>1$ 时，$L^p(E_n)$ 中函数 f 的累次 Poisson 积分也有同样的结果. 我们已经知道，在 $f\in L^1(E_n)$ 时，可能没有非限制收敛性. 但是，如果我们再假定 $|f|(\log|f|)^{n-1}$（当 $|f|=0$ 时，$|f|(\log|f|)^{n-1}$ 为0）是局部可积的（$f\in L^p(E_n)$，$p>1$，就是这种情形），那么，f 的累次 Poisson 积分就对几乎一切 $x\in E_n$ 非限制收敛于 $f(x)$.（参看 Jessen，Marcinkiewicz 和 Zygmund[1].）

6.7 一个正则锥 Γ 叫做自对偶的，如果它的闭包 $\overline{\Gamma}$ 与它的对偶锥 Γ^* 重合. 正则锥 Γ 的一个自同构指的是一个定义在 E_n 上、把 Γ 映到 Γ 上的线性算子. Γ 的自同构的全体构成一般线性群 $GL(E_n)$ 的一个闭子群 $\Sigma=\Sigma(\Gamma)$. 若 Γ 是可迁的（即，对于 Γ 中的任意 x 和 y，有一个自同构 $\rho\in\Sigma$，使 $\rho x=y$），并且 Γ 是自对偶的，则称 Γ 为正性（齐次）区域. 除一个特殊的低维锥外，所有的正性区域都可以看成下面四种常被称作“古典区域”的正性区域的直和（详见 Koecher[1]，Rothaus[1] 和 Vinberg[1]）：

（i）前向光锥. 这是一个锥 $C_n\subset E_n$，$n>1$，它由一切 $x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0$，且 $x_1>0$ 的点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E_n$ 组成，自同构群 $\Sigma=\Sigma(C_n)$ 则由一切使双线性型 $(x, y)=x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n$ 和 $x_1>0$ 保持不变（允许乘以某正常数）的线性变换 ρ 组成.

（ii）如果对某个正整数 m，有 $n=m(m+1)/2$，则我们可以认为 E_n 等同于一切 $m\times m$ 实对称矩阵的向量空间. 这时，$S_m\subset E_n$ 是一切正定实对称矩阵组成的锥. 自同构群 $\Sigma=\Sigma(S_m)$ 可由

一般实线性群 $GL(E_m)$ 如下得到：对于每个 E_m 上的非奇异线性变换 g，对应着 S_m 的自同构 $\rho=\rho_g$，它把 $x\in E_n$ 映成 $\rho x=gxg^*$（此处，g^* 是 g 的转置）．锥 S_m 上的管 T_{S_m} 即所谓 Siegel 广义上半平面（当 $m=1=n$ 时，这个管就是上半平面 E_2^+）．

(iii) 当 $n=m^2$ 时，可以认为 E_n 与 $m\times m$ 复 Hermite 矩阵（即，复 $m\times m$ 矩阵 x 等于其共轭转置 x^*）的实向量空间等同．这时，$H_m\subset E_n$ 是一切 $m\times m$ 正定复 Hermite 矩阵组成的锥．$\Sigma(H_m)$ 可以从一般复线性群 $GL(\boldsymbol{C}_m)$ 如下得到：对于每个 $\boldsymbol{C}_m$ 上的非奇异线性变换 g，对应着 H_m 的自同构 $\rho=\rho_g$，它把 $x\in E_n$ 映成 gxg^*．此处 g^* 是 g 的共轭转置．

(iv) 当 $n=2m^2-m$ 时，可以认为 E_n 与 $m\times m$ 四元 Hermite 矩阵的实向量空间等同．则 $Q_m\subset E_n$ 是一切正定 $m\times m$ 四元 Hermite 矩阵组成的锥．$\Sigma(Q_m)$ 可以从一般四元线性群如下得到：对 $x\in E_n$，令 $\rho_g x=gxg^*$，其中 g^* 是非奇异 $m\times m$ 四元矩阵 g 的四元共轭转置．

与这些锥相伴的 Cauchy 核和 Poisson 核可以直接计算．当 $x+iy$ 是以前向光锥为基的管 T_{C_n} 的点时，Poisson 核在该点的值是：

$$\mathscr{P}(x,\ y)=c_n\frac{(y,\ y)^{n/2}}{\{[(x,\ x)-(y,\ y)]^2+4(x,\ y)^2\}^{n/2}}$$

$$=c_n\frac{(y,\ y)^{n/2}}{|(x+iy,\ x+iy)|^n}.$$

而当 $x+iy\in T_{S_m}$ 时，$\mathscr{P}(x,\ y)=a_n\{\det y/|\det(x+iy)|^2\}^{(n+1)/2}$，当 $x+iy\in T_{H_m}$ 时，$\mathscr{P}(x,y)=a_n'\{\det y/|\det(x+iy)|^2\}^n$．对于每个四元数 $a_0+ia_1+ja_2+ka_3=(a_0+ja_1)+i(a_2+ja_3)$，对应着一个复数域上的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{pmatrix}.$$

其中，$\alpha=(a_0+ja_2)$，$\beta=(a_1+ja_3)$．这是一个同构对应，并且可以扩张成 $m\times m$ 四元 Hermite 矩阵 x 和复系数 $(2m)\times(2m)$ 矩阵 x' 之间的对应，按照这种对应，对 $x+iy\in T_{Q_m}$，我们有

$$\mathscr{P}(x, y)=a_n''\{\det y'/|\det(x'+iy')|^2\}^{(2n-1)/2}.$$

6.8 在6.6中所述的关于 Γ 是第一卦限时的结论，对于一般的锥是不成立的. 事实上，既使对于 $L^p(E_n)$ $(p>1)$ 中的函数，其 Poisson 积分也可以不是非限制收敛的. 例如，当 $\Gamma=C_n$(前向光锥)，$n\geqslant 3$，且 $1\leqslant p<\infty$ 时，就存在着 $f\in L^p(E_n)$，它对于几乎一切 $x\in E_n$，当 $y\in\Gamma$ 而无限制地趋向0时，有

$$\limsup u(x,y)=\limsup\int_{E_n}\mathscr{P}(x-t, y)f(t)dt=\infty.$$

(见 Stein 和 N. J. Weiss[1]). 但是，当我们考虑的是限制收敛，且管的基 Γ 是6.7所述的情形之一时，则6.6的结论是肯定的. 实际上，如果 $f\in L^p(E_n)$，$p\geqslant 1$，那么，对几乎每个 $x\in E_n$，当 $y\in\Gamma$ 受限制地趋向于0时，Poisson 积分 $u(x, y)$ 收敛于 $f(x)$(参阅 Stein 和 N. J. Weiss[1]).

6.9 古典的 Cayley 变换是一个线性分式变换 $w=(z-i)/(z+i)$，它把上半平面映到单位圆盘 $|w|<1$ 上. 6.7(ii)中所述的对应于 S_m 的 Seigel 上半平面，可以由广义 Cayley 变换映成"圆盘"D——满足 $w^*w<I$ 的 $m\times m$ 复对称矩阵 w 做成的圆盘，其中 I 是 $m\times m$ 单位矩阵. 广义 Cayley 变换是由 $w=(z-iI)\times(z+iI)^{-1}$ $(z=x+iy\in T_{S_m})$ 给出的. 这时，"特异边界"或"脊" $\{z=x+iy\in C_n; y=0\}$ 对应于对称酉矩阵. 对于6.7中所介绍的其他古典区域上的管，也有类似的变换(见 Bochner[1], Pyatetskii-Shapiro[1], Korányi 和 Wolf[1]). 这些管的象组成 Cartan 有界对称区域的一个重要子类(见 Hua[1] 和 Helgason[1]).

6.10 令 D 是满足 $w^*w<I$ 的 $m\times m$ 复矩阵 w 组成的区域. 我们可以把 D 作为 C_{m^2} 中的区域来考虑. 我们说，一个复值函数 F 属于 $H^p(D)$ $(p>0)$，如果它在 D 内是全纯的，且对于 $0\leqslant\rho<1$，有 $\int_U|F(\rho u)|^p du\leqslant M<\infty$，其中 u 遍及酉群 U，du 是群 U 上的 Haar 测度元. 可以证明，对于 $F\in H^p(D)$，$p>0$，有：(i) 对几乎每个 $u\in U$，$\lim\limits_{\rho\to 1}F(\rho u)=F(u)$ 存在；(ii) 当 $\rho\to 1$ 时，

$$\int_U |F(\rho u)-F(u)|^p du \to 0.$$

在任何 Reinhardt 圆形域上,也有类似的结果成立,因而对 Cartan 有界对称域也有类似结果(参看 Bochner [5]). 当 D 是多圆柱 $\{z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in C_n;\ |z_j|<1,\ j=1, 2, \cdots, n\}$时,空间 $H^p(D)$ $(p>0)$则由定义在 D 上且对 $0\leqslant r_j<1,\ j=1, 2, \cdots, n$,满足

$$\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} |F(r_1e^{i\theta_1}, \cdots, r_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1\cdots d\theta_n \leqslant M<\infty$$

的全纯函数 F 组成. 类似地,当 D 是开单位球 $\{z=(z_1, \cdots, z_n)\in C_n;\ |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$, 定义在 D 上的一个全纯函数 F 叫做属于$H^p(D)$,如果对 $0\leqslant\rho<1$,有$\int_{\partial D} |F(\rho z')|^2 dz'\leqslant M<\infty$,这里,$D$ 的边界 ∂D 可以看作是与 E_{2n} 的单位球面 Σ_{2n-1} 等同, 而 dz' 则是曲面面积元. 在这些情况下,我们可以加强(i)与(ii)的结论,使之包含趋于边界时的非切向收敛性. 当 D 是多圆柱时, 逼近可以是"非限制"的. 也就是说, 半径 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 可以独立地趋于 1 (详见 Zygmund[1] 和[3],也可参见 Korányi[1]).

6.11 设 D 是区域 $\left\{z=(z_1, z_2, \cdots, z_n);\ \mathscr{I}z_1>\sum_{j=2}^n |z_j|^2\right\}$, 由 $w_1=(z_1-i)/(z_1+i)$, $w_j=2z_j/(z_j+i)$, $j=2, \cdots, n$, 给出的映射 $z\to w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$把 D 变到开单位球 $\left\{w\in C_n;\ \sum_{j=1}^n |w_j|^2<1\right\}$ 内($n=1$时, 这个映射就是 Cayley 变换). 含 D 之区域以及凸锥上管域的一般类已经在 Pyatetskii-Shapiro[1] 中引入, 并被称为第二类 Siegel 区域(也可参看 Korányi[2]). 对于这种区域推广定理 5.1 的 H^p 理论,可以在 Stein[6] 中看到.

6.12 n维立方体 $Q=Q_n=\{y\in E_n;\ 0<y_j<1,\ j=1, 2, \cdots, n\}$ 上的管具有第一卦限上的管的许多性质,例如, 对于前者, 有类似于定理 5.1 的结果: 若 $F\in H^p(T_Q)$, $p>0$, 又 y_0 是 Q 的顶点, 则在几乎每个 $x\in E_n$ 处, F 按各变量有非切向极限 $F(x+iy_0)$. 特别地,对几乎每个 $x\in E_n$,有 $\lim\limits_{y\in Q,\, y\to y_0} F(x+iy)=F(x+iy_0)$. 而且,

当 $y\in Q$ 趋向于 y_0 时，有 $\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x+iy_0)|^p dx$ 趋于 0. 其证明类似于定理 5.1. 其中上半平面的地位由带状域 $\{z=x+iy\in C_1;\ x\in E_1,\ 0<y<1\}$ 代替，而定义在该区域边界上的函数 f 的 Poisson 积分由公式

$$u(x+iy)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\pi y\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x-t)}{\cosh\pi t-\cos\pi y}+\frac{f(x-t+i)}{\cosh\pi t+\cos\pi y}\right]dt$$

给出(见第五章引理 4.2 证明后面的评述)．借助于适当的线性变换，我们还可以把这一结果推广到定义在以多面体为基之管上的函数的 H^p 空间．于是，得出定理 5.5(和定理 5.5′)的下述推广：

若 $F\in H^p(T_B)$, $p>0$, 其中 B 是 E_n 的一个开凸子集，y_0 是 B 的边界上一点，则对几乎每个 $x\in E_n$, 限制极限

$$\lim_{y\to y_0,\,y\in B}F(x+iy)=F(x+iy_0)$$

存在．并且，当 $y\in B$ 限制地趋向 y_0 时，

$$\int_{E_n}|F(x+iy)-F(x+iy_0)|^p dx\to 0.$$

6.13 在本章第 3 节，我们曾引入与各正则锥 $\Gamma\subset E_n$ 相伴的 Poisson 核．它是把与上半平面(即以实数集 $\Gamma\subset E_1$ 为基的管)相伴的古典 Poisson 核和 Cauchy 核之间的关系推广到 n 维而得到的．这种类型的其它关系也是存在的．下式可能给出了其中最简单的：

$$\begin{aligned}K(x+iy)&=-\frac{1}{2\pi i(x+iy)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}+i\frac{x}{\pi(x^2+y^2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\{P(x,\ y)+iQ(x,\ y)\}.\end{aligned}$$

从而，$P(x,\ y)=2\mathrm{Re}\{K(x+iy)\}$. 称核 $Q(x,y)=2\mathscr{I}\{K(x+iy)\}$ 为共轭 Poisson 核．正是这种关系促使我们把

$$P(x,\ y)=2\mathrm{Re}\{K(x+iy)\}=2\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma^*}e^{2\pi i(x+iy)\cdot t}dt\right\}$$

和 $\quad Q(x,\ y)=2\mathscr{I}\{K(x+iy)\}=2\mathscr{I}\left\{\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+iy)\cdot t}\,dt\right\}$

作为与正则锥 $\Gamma\subset E_n$ 相伴的 Poisson 核和共轭 Poisson 核的推广来考虑. 譬如, 当 Γ 是 E_2 的第一象限时,

$$P(x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2)=P(x,\ y)$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\,\frac{y_1y_2-x_1x_2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}.$$

特别地, 我们看到 $P(x,\ y)$ 未必是正核. 正因为这一点和其它一些理由, $P(x,\ y)$ 并不是一个令人满意的恒等逼近. 不过, 它可以与 $Q(x,\ y)$ 一起用来说明 H^2 函数的实部与虚部的相互关系, 以及与它们的边界值之间的关系.

如果 $\Gamma\subset E_n$ 是正则的凸开锥, 令 χ^* 表示其对偶锥 Γ^* 的特征函数, sgn^* 表示 Γ^* 的符号函数: $t\in\Gamma^*$ 时, $\mathrm{sgn}^*t=1$; $-t\in\Gamma^*$ 时, $\mathrm{sgn}^*t=-1$; 在其余各处, $\mathrm{sgn}^*t=0$. 从上述定义立即可得

$$P(x,\ y)=\int_{E_n} e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi|y\cdot t|}[\chi^*(t)+\chi^*(-t)]\,dt$$
$$Q(x,\ y)=-i\int_{E_n} e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi|y\cdot t|}[\chi^*(t)-\chi^*(-t)]\,dt$$
$$=-i\int_{E_n} e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi|y\cdot t|}\mathrm{sgn}^*t\,dt.$$

那么, 对每个 $y\in\Gamma$, $\hat{P}_y(t)=[\chi^*(t)+\chi^*(-t)]e^{-2\pi|y\cdot t|}$ 和 $\hat{Q}_y(t)=(-i\,\mathrm{sgn}^*t)e^{-2\pi|y\cdot t|}$ 就是 $P_y=P(\cdot,\ y)$ 和 $Q_y=Q(\cdot,\ y)$ 的 Fourier 变换之值.

现设 $F=u+iv\in H^2(\Gamma)$. 由推论 3.4 知, L^2 边界值

$$\lim_{y\in\Gamma,\,y\to 0} F(x+iy)=u(x)+iv(x)$$

存在. 我们不难证明下列结论:

(i) 对一切 $z\in T_\Gamma$, $F(z)=\int_{E_n} 2K(z-\xi)u(\xi)\,d\xi$,

(ii) 当 $z\in T_\Gamma$ 时, $v(z)=v(x+iy)=\int_{E_n} Q(x-\xi,\ y)u(\xi)\,d\xi$,

且其边界值 $v(x)$ 和 $u(x)$ 满足关系式 $\hat{v}(t)=(-i\,\mathrm{sgn}^*t)\hat{u}(t)$,

(iii) 一个实值函数 $u\in L^2(E_n)$ 是 $H^2(T_\Gamma)$ 中一个函数 F 的

L^2 边界值 $F(x)=\lim\limits_{y\in\Gamma, y\to 0} F(x+iy)$ 的实部，当且仅当 $u(t)$ 在 $\Gamma^*\cup(-\Gamma^*)$ 外几乎处处为 0, 此处，$-\Gamma^*=\{t\in E_n;\ -t\in\Gamma^*\}$.

取(i)的虚部，立即可得(ii)的前一部份结论. (ii)的后一部份可从对等式两端施行 Fourier 变换，再取 $y\in\Gamma$ 趋于 0 时的极限而得到. 如果 $u\in L^2(E_n)$ 是一个 $F\in H^2(T_\Gamma)$ 的边界值之实部，则由(i)以及 Cauchy 核的定义可得，对一切 $z\in T_\Gamma$,

$$F(z)=2\int_{E_n} K(z-\xi)u(\xi)d\xi=2\int_{\Gamma^*}\hat{u}(t)e^{2\pi iz\cdot t}dt.$$

我们注意到，在任何情况下，这样定义的 F 总是属于 $H^2(T_\Gamma)$ 的(这由定理 3.1 可知)，并且它的实部 $u_y(x)=u(x+iy)$ 等于 $\int_{E_n} P(x-\xi,\ y)u(\xi)d\xi$. 于是，取 Fourier 变换

$$\hat{u}_y(t)=e^{-2\pi|y\cdot t|}(\chi^*(t)+\chi^*(-t))\hat{u}(t).$$

由此立即可得(iii). 至于(i), 可在等式

$$F(z)=\int_{E_n} K(z-\xi)F(\xi)d\xi$$

两端加上 $0=\int_{E_n} K(z-\xi)\overline{F(\xi)}d\xi$ 而得到. 这前一个等式可从定理 3.6 推得，而后一等式则是定理 3.1 和 Cauchy 核定义的简单推论.

6.14 当 $n=1$, Γ 是正实轴时，每个实值函数 $u\in L^2(E_1)=L^2(-\infty,\ \infty)$ 都是某函数 $F=u+iv\in H^2(E_2^+)$ 的边界值之实部. 这可由 6.13 之(iii)和 $\Gamma^*\cup(-\Gamma^*)=(-\infty,\ \infty)=E_1$ 直接推出. 根据(ii)和 Plancherel 定理，我们看到映射 $u\to v$ 是有意义的，并且是 $L^2(E_1)$ 的一个等距映射(实际上，它是酉变换). 这一映射称为 Hilbert 变换. 我们将在第五章第 2 节中证明，对 $1<p<\infty$, Hilbert 变换可以定义在 $L^p(E_1)$ 上，并且是到 $L^p(E_1)$ 的一个有界线性变换. 这个事实等价于：存在一个常数 $A_p<\infty$, 只要 $u+iv$ 是函数 $F\in H^p(E_2^+)$ 的边界值，就有

$$\|v\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant A_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^p dx\right)^{1/p}=A_p\|u\|_p.$$

这就是著名的M. Riesz不等式. 这个一维的结果可以推广到 n 维,即:

若 $F=u+iv\in H^p(T_\Gamma)$, $1<p<\infty$, 其中 Γ 是 E_n 中的一个开凸锥. 则存在一个常数 $A_p<\infty$, 使对 $y\in\Gamma$ 和 $y=0$(这个极限值可按定理5.6的意义来取),有

$$\left(\int_{E_n}|v(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant A_p\left(\int_{E_n}|u(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

经坐标变换, 我们可以把它化成射线 $(\eta_1, 0, \cdots, 0)(\eta_1>0)$ 属于 Γ 中的情形. 如果固定 $y\in\Gamma$, 且 $\eta=(\eta_1, 0, \cdots, 0)$, $\eta_1>0$, 则 $y+\eta\in\Gamma$, 并且根据一维的结果,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|v(x_1+iy_1+i\eta_1, \cdots, x_n+iy_n)|^p dx_1$$
$$\leqslant A_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|u(x_1+iy_1+i\eta_1, \cdots, x_n+iy_n)|^p dx_1.$$

现在在等式两端都对 $x_2, \cdots, x_n$ 积分, 然后令 $\eta_1\to 0$, 就得到所要的不等式. 至于在 $y=0$ 的情形, 可由此再令 $y\in\Gamma$ 趋于0而得到.

6.15 设 K 是任一不含(整条直)线的开凸集. 假设 $p\notin K$, Γ 是由 p 和 K 生成的锥. 则 Γ 不包含任何(整条直)线. 为说明这一点, 我们先假定 $n=2$. 考虑 K 的支撑线. 它们或是都平行(这时, K 必定会包含这样一条线); 或是有两条固有相交直线,它们的交决定了一个含 K 的锥 Γ_0, 使 Γ_0 中没有这样一条线. 那么,所要证的 Γ 的性质就是显然的了. 现在再设 $n>2$, 且 l 是 Γ 中的一条线. 设 π 是含 l 和 p 的平面, 记 $K'=K\cap\pi$, $\Gamma'=\Gamma\cap\pi$. 于是, K' 是开凸集,且不含任何线. 此外, Γ' 是由 K' 和 p 产生的锥,且 Γ' 包含 l. 这就与证明过的 $n=2$ 的情形矛盾.

6.16 如果开凸锥 Γ 不含直线, 那么, Γ 必是正则的. 从定理3.1便可推知, $H^2(T_\Gamma)$ 含有不恒为0的函数. 为证明对 Γ 的这个论断,我们要利用 $\overline{\Gamma}=(\Gamma^*)^*$(见 Rockafellar[1],定理14.1). 假如 Γ^* 没有内部, 则它就将包含于一个超平面之中, 这就会推出 $\overline{\Gamma}$ 包含一直线,因而 Γ 就包含一直线.

文献注释

H^p 空间古典理论的基本结果可以在 Zygmund[1]第七章中看到. 管上的 H^2 理论是 Bochner 首先研究的, 基本结果(定理 2.3)就是属于他的(见 Bochner[8]). § 2, § 3, § 5 中的许多结果在 Stein, G . Weiss 和 M. Weiss 的[1]中给出. 与凸锥相伴的 Cauchy 核是由 Bochner引入的(见[1]), 他还对相应于古典定义域的锥的情形直接计算了这个核. 至于 Paley-Wiener 定理在 n 维的其它各种推广, 可参看 Plancherel and Polya [1] 和 Stein [1]. (6.5)中描述的曲线限制收敛的概念是 Calderón 和 Zygmund[1]建立的. 关于 Hilbert 变换的基本结果, 在 Titchmarsh[2]和Zygmund[1]中给出. 早期研究多复变 H^p 理论的文章, 可参阅 Bochner[2], Zygmund [3] 和 Bochner [5]. 对于凸集理论的介绍, 可参看 Valentine[1]和 Rockafellar[1].

第四章 Fourier 变换的对称性质

Fourier 分析与欧氏空间的平移变换群有着紧密的联系. 但假如仅限于研究与这种平移结构有关的问题, 我们就得不出什么在局部紧 Abel 群上抽象调和分析中所没有的结果, 同时也就失去了它许多良好的普遍性. 然而欧氏空间上的调和分析是比较丰富的, 这是因为它与若干种变换都有联系: 伸缩、旋转和平移. 这种联系在我们讨论调和函数和全纯函数时已有所显露. 现在, 我们希望弄清楚 Fourier 变换与伸缩和旋转之间的进一步联系.

研究这个问题的起始点是: 在伸缩变换下, Fourier 变换有非常简单的规律, 而且 Fourier 变换与旋转变换可交换. 这后一性质导致 $L^2(E_n)$ 直和分解成许多部份, 在每一部份上, 对于旋转, Fourier变换都以特定的方式进行. Fourier 变换保持着这个直和, 而且它在每一部份上的限制可以等同于一个古典的 Bessel 变换. 这个分解是通过极坐标得到的, 它使我们第一次能在 E_n 的单位球面上分解 L^2 函数空间. 另外, 这一分解是利用齐次调和多项式在单位球面上的限制得到的. 按上述观点, 研究这些球调和函数是非常自然的, 因为 Laplace 算子既是平移不变的也是旋转不变的, 而这些多项式的齐次性反映了伸缩的作用.

本章安排如下: 第 1 节处理二维情形, 这种情形特别简单, 因为单位球面上 L^2 的分解是按照一维平方可积函数的 Fourier 级数展开而得到的. 在第 2 节中, 以建立球调和函数的理论来把这种展开推广到 n 维. 在第 3 节中, 先研究径向函数空间——在上述 $L^2(E_n)$ 分解中最简单的被加项, 再处理直和分解的其余部份. 第 4 节阐述这一理论的某些应用, 包括位势理论和奇异积分中的几个重要等式, 在那里, 伸缩和旋转的相互关系是很明显的.

§1 将 $L^2(E_2)$ 分解为 Fourier 变换下不变的子空间

本章的主要目的是要更为详细地研究 E_n 上函数的 Fourier 变换. 我们将通过以下方式来研究: 找出 $L^2(E_n)$ 的一个自然的直和分解, 它在 Fourier 变换下保持不变, 然后详细分析 Fourier 变换是如何作用在每个被加项上的. 这样, 我们就会导出 Bessel 函数和球调和函数的基本性质. 这些内容不仅对调和分析的其它方面, 而且也在分析的其它分支中, 有着基本的重要性.

在一维情形中, $L^2(E_1)$ 有一个简单而自然的分解. 将函数 f 分解成 $f=f_e+f_o$, 其中 $f_e=[f(x)+f(-x)]/2$ 为偶部, $f_o=[f(x)-f(-x)]/2$ 为奇部. 容易看出, 奇函数子空间和偶函数子空间在 Fourier 变换下是不变的, 它们彼此正交, 且其直和就是全 $L^2(E_1)$. 这些性质显然在 n 维中也是成立的. 在下面我们考虑函数的偶部在高维中的推广时, 将会出现一个虽较复杂但甚为有趣的情况. 给定一个在 E_n 上局部可积的函数 f, 它的径向部份 φ 定义作:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma_{n-1}} f(rx')\,dx',$$

这里, 我们按过去的约定: $r=|x|$, $x'=x/r$ (当 $x\neq 0$ 时), ω_{n-1} 为 E_n 中单位球面 Σ_{n-1} 的面积. 显然, φ 是径向函数, 即 φ 仅依赖于 $r=|x|$. 我们看到, 当 $n=1$ 时, $\varphi=f_e$.

径向函数这个概念, 在采用极坐标时, 当然是很自然的; 在研究 Fourier 变换的作用时, 它也是很适用的. 这一点可通过下面的论述看清楚, 而由此论述可推出径向函数的 Fourier 变换也是径向函数. 首先我们注意到, 定义在 E_n 上的函数 f 是径向的, 当且仅当对一切 $x\in E_n$ 和 E_n 上的一切正交变换[1] ρ, 有 $f(\rho x)=f(x)$.

1) 我们回忆一下, 说 ρ 是正交的, 如果它是定义在 E_n 上的线性算子, 且对 E_n 中一切 x, y, 保持内积: $\rho x\cdot\rho y=x\cdot y$. 若 $\det\rho=1$, 则称 ρ 为一旋转. 当 $n>1$ 时, 下述结论也是成立的: f 是径向的, 当且仅当对一切旋转 ρ 和一切 $x\in E_n$, 有 $f(\rho x)=f(x)$.

对于正交变换来说，Fourier 变换有以下基本性质：

定理1.1 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 与正交变换是可交换的. 就是说，若 ρ 是一个正交变换，令 R_ρ 是把 E_n 上的函数 f 映成函数 g 的映射，g 在 $x\in E_n$ 的值是 $g(x)=(R_\rho f)(x)=f(\rho x)$，则当 $f\in L^1(E_n)$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{g}(t)&=(\mathscr{F}g)(t)=(\mathscr{F}R_\rho f)(t)=(R_\rho\mathscr{F}f)(t)\\&=(\mathscr{F}f)(\rho t)=\hat{f}(\rho t).\end{aligned}$$

即算子 $\mathscr{F}$ 和 R_ρ 可交换：$\mathscr{F}R_\rho=R_\rho\mathscr{F}$.

证明 由于 ρ 的共轭算子也是它的逆算子，且变量代换 $w=\rho x$ 的 Jacobi 行列式是 1，于是我们有

$$\begin{aligned}\hat{g}(t)&=\int_{E_n}e^{-2\pi it\cdot x}f(\rho x)dx=\int_{E_n}e^{-2\pi it\cdot\rho^{-1}w}f(w)dw\\&=\int_{E_n}e^{-2\pi i\rho t\cdot w}f(w)dw=\hat{f}(\rho t).\end{aligned}$$ ▌

因为对于 E_n 的两个点 x_1、x_2，只要 $|x_1|=|x_2|$，必有一个正交变换 ρ，使 $\rho x_1=x_2$，故立即可得我们曾经谈到过的 Fourier 变换的性质：

推论1.2 若 f 是 $L^1(E_n)$ 中的径向函数，则 $\hat{f}$ 也是径向的.

这个结论显然可以推广到 $L^2(E_n)$. 那么，我们只要考虑那些与径向函数几乎处处相等的函数所组成的子空间 $\mathfrak{H}^0$ 以及 $\mathfrak{H}^0$ 的正交补，就得到 $L^2(E_n)$ 的一个直和分解，它在 Fourier 变换下保持不变(这是 Plancherel 定理的直接结果). 因此，我们自然会问，能否把与径向函数空间正交的函数空间简单地描述出来，以及能否对这个函数空间上的 Fourier 变换的作用了解得更为详细. 我们首先在二维情形中来考虑这些问题.

我们在 $L^2(E_2)$ 中取 f，并将 E_2 中的点 $(x,\ y)$，按标准记法记作复数 $x+iy=z=re^{i\theta}$. 由 Fubini 定理可知，对几乎一切 r，$f(re^{i\theta})$ 定义了一个 θ 的平方可积函数. 因而，我们有 Fourier 级数展开

$$f(re^{i\theta})\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(r)e^{ik\theta},\tag{1.3}$$

它对于几乎每个 r，按 L^2 范数收敛于 $f(re^{i\theta})$. 此外，还有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k(r)|^2=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta$$

几乎处处成立．因此，根据 Lebesgue 单调收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\sum_{-n}^{n}|f_k(r)|^2r\,dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta\right\}r\,dr$$
$$=\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

令 $g_k(z)=f_k(r)e^{ik\theta}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$，我们就得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_2}\left|f(z)-\sum_{-n}^{n}g_k(z)\right|^2dz$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\pi\int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta\right\}-\sum_{-n}^{n}|f_k(r)|^2\right]r\,dr$$
$$=0.$$

此式，连同指数函数 $e^{ik\theta}(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 所满足的正交性关系式，表明我们有直和分解：

(1.4) $$L^2(E_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}^k,\text{[2)]}$$

其中，$\mathfrak{H}^k=\left\{g\in L^2(E_2);\ g(z)=f(r)e^{ik\theta}\right.$ 对某个满足 $\int_0^\infty|f(r)|^2r\,dr<\infty$ 的可测函数几乎处处成立$\left.\right\}$．这个符号与前面用过的是一致的，在前后两种情况下，$\mathfrak{H}^0$ 都恰好是那些几乎处处等于径向函数的平方可积函数的子空间．而且，我们从(1.4)还看出，$\mathfrak{H}^0$ 的正交补是子空间 $\mathfrak{H}^k(k\neq0)$的直和．

我们知道，Fourier 变换把 $\mathfrak{H}^0$ 映入自身．容易看出，它也把每个子空间 $\mathfrak{H}^k\ (k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 映入自身：首先设 g 属于 $\mathfrak{H}^k\cap L^1(E_2)$，并对固定的 ϕ，令 $h(z)=g(e^{i\phi}z)$．则有 $h(z)=e^{ik\phi}g(z)$对几乎一切 z 成立．另一方面，乘以 $e^{i\phi}$ 的变换是 E_2的一个旋转，且因Fourier 变换与旋转是可交换的(定理 1.1)，于是我们得知，对一切w和 ϕ，有

$$\hat{g}(e^{i\phi}w)=\hat{h}(w)=e^{ik\phi}\hat{g}(w).$$

2) 这个直和意味着：每个子空间 $\mathfrak{H}^k$ 在 $L^2(E_2)$ 中是闭的、相互正交的，并且它们张成的线性空间的闭包包含 $L^2(E_2)$.

设 $w=r\geqslant 0$，我们便看出，$\hat{g}$ 也属于 $\mathfrak{H}^k$. 由于 $\mathfrak{H}^k\cap L^1(E_2)$ 在闭子空间 $\mathfrak{H}^k$ 中稠密，所以 Fourier 变换将各子空间 $\mathfrak{H}^k$ 映入自身. 再根据 Plancherel 定理，就可推知，一切子空间 $\mathfrak{H}^k$ 是相互映上的.

因此，我们找到了 $L^2(E_2)$ 的一个直和分解，即(1.4)，它对 Fourier 变换保持不变. 这就回答了我们的第一个问题. 为了回答第二个问题，我们来较为详细地研究一下 Fourier 变换是如何作用在每个子空间 $\mathfrak{H}^k$ 上的.

在 $\mathfrak{H}^k$ 中选 f，此 f 对几乎一切 $z=re^{i\theta}$ 必定具有形式 $f(z)=f_0(r)e^{ik\theta}$. 因 $\hat{f}$ 也一定属于 $\mathfrak{H}^k$，故它也有类似的形式. 也就是说，对几乎一切 $w=Re^{i\phi}$，$\hat{f}(w)=F_0(R)e^{ik\phi}$. 假设 f 是可积的，我们来直接计算 F_0(其结果显然可推广到平方可积函数 f). 令 $w=Re^{i0}=R$，我们有

$$F_0(R)=\hat{f}(Re^{i0})=\int_0^\infty f_0(r)\left\{\int_0^{2\pi} e^{-2\pi iRr\cos\theta}e^{ik\theta}d\theta\right\} r\,dr$$

$$=(-i)^k 2\pi\int_0^\infty f_0(r)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\pi iRr\sin\theta}e^{-ik\theta}d\theta\right\} r\,dr.$$

于是我们看到，在用 f_0 表示 $F_0(R)$ 的显式表达式中，包含有 θ 的函数 $e^{it\sin\theta}$ 的 Fourier 系数. 这些依赖于 t 的系数就是熟知的 Bessel 函数 $J_k(t)$. 就是说，由式

$$J_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}\,d\theta$$

定义了 Bessel 函数 J_k, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 经过简单的变量代换，我们就得出一个对一切整数 k 都成立的关系式:

(1.5) $$J_k(t)=(-1)^k J_{-k}(t).$$

于是，我们可以把作用在 $\mathfrak{H}^k$ 上 Fourier 变换的主要结果叙述如下:

定理 1.6 设 f 属于 $L^1(E_2)$，且 $f(z)=f_0(r)e^{ik\theta}$，这里 $z=re^{i\theta}$，则 $\hat{f}(w)=F_0(R)e^{ik\phi}$，其中 $w=Re^{i\phi}$，

$$F_0(R)=2\pi i^k\int_0^\infty f_0(r)J_{-k}(2\pi Rr)r\,dr$$

$$=2\pi(-i)^k\int_0^\infty f_0(r)J_k(2\pi Rr)r\,dr.$$

§2 球调和函数

为了把上述分解推广到n维，需要能把定义在单位球面上的函数表成类似于 Fourier 级数展开的形式. 这样，我们便能对$f(x)=f(rx')$得到类似于(1.3)的结果，我们证明这是可能的，只需用称之为球调和函数的函数类来充当指数函数$e^{ik\theta}(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的角色. 在定义这些函数之前，我们先简单考察一下三角级数$s(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$.

我们把该级数看成是对称部分和序列

$$s_n(\theta)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}=c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ik\theta}+c_{-k}e^{-ik\theta}).$$

在$c_k=\bar{c}_{-k}$时，这些和是实值的. 此时，$s_n(\theta)$是多项式$p_n(z)=c_0+2\sum_{k=1}^{n} c_k z^k (z=re^{i\theta}\in C_1)$的实部$u_n(z)$在单位圆$\Sigma_1$上的限制. 因为对复系数$c_1, c_2, \cdots, c_n$未加任何限制，且$c_0$可以是任何实数，所以，$u_n(z)=u_n(x+iy)$便是变量$x$和$y$的任意一个$n$阶实调和多项式. 其被加项$c_0$和$\mathrm{Re}\{c_k z^k\}=q_k(z)(k=1, 2, \cdots)$便是广义齐性[3] k阶实调和多项式. 那么，线性组合$Y^{(k)}(e^{i\theta})=c_k e^{ik\theta}+\bar{c}_k e^{-ik\theta}=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta$(其中$c_k=(a_k-ib_k)/2$)，就恰好是多项式$q_k(z)=q_k(re^{i\theta})$在单位圆$|z|=1$上的限制. 特别地，由于单位圆上的每个实值$L^2$函数可以用它的 Fourier 级数(按$L^2$范数)表示，且它的各项正是这样的限制，所以我们知道，$L^2(\Sigma_1)$就是这些函数$Y^{(k)}$, $k=0, 1, 2, \cdots$，所张成之空间的闭包.

一般来说，k阶齐次调和多项式在单位球面Σ_{n-1}上的限制，就称为k阶球调和函数. 本节将研究球调和函数的重要性质. 特别地，它将使我们能指出$L^2(E_n)$是如何分解成类似于(1.4)的直和的，在该分解中，被加项$\mathfrak{H}_k$由$L^2(E_n)$的子空间构成，这些子空

3) 定义在E_n上的函数f叫作是k阶齐次的，如果对一切$x\in E_n$和$a>0$，有$f(ax)=a^k f(x)$。

间是由径向函数与 k 阶球调和函数相乘所得的函数所张成的[4]. 它们在 Fourier 变换下都保持不变. 下面我们详细描述 Fourier 变换在这些子空间上的性态, 从而得出定理 1.6 的推广.

令 $\mathscr{P}_k$ 是 E_n 上一切复系数 k 阶齐次多项式的集合. 则若 $P\in\mathscr{P}_k$, 就有

$$P(x)=\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha x^\alpha,$$

其中(如同在第一章中那样), α 表示 n 元非负整数组$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 显然, 单项式$x^\alpha$($|\alpha|=k$)的集合是这个空间的基. 另一方面, 这些单项式的个数恰好是使 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$ 的 n 元非负整数组 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$的所有可能的取法的总数 d_k. d_k 是不难算出的. 我们在 $n+k-1$ 个盒子的线性有序列中, 选出 $n-1$ 个盒子, 在其余的 k 个盒子中各装一个球. 那么, 在我们选的第一个盒子的前面就有 α_1 个球, 在我们选的第一个和第二个盒子之间就有α_2个球, 如此等等, 直至在我们选的最后一个盒子之后就有 α_n 个球. 这样, 我们就得到 n 个非负整数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$, 满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$, 而且, 用这样的方法可以得到一切这样的 n 元数组. 因此这种 n 元数组的个数就和从 $n+k-1$ 个盒子中取 $n-1$ 个的取法总数一样多. 因而, $\mathscr{P}_k$ 的维数 d_k 是:

$$d_k=\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

我们在 $\mathscr{P}_k$ 中引入内积$\langle P, Q\rangle$: 对所有 $P, Q\in\mathscr{P}_k$, 令$\langle P,\ Q\rangle=P(D)\bar{Q}$, 其中, $P(D)$是在第一章中引入的微分算子(见(1.9)). 因 P 和 Q 是同阶齐次多项式, 所以 $\langle P,\ Q\rangle$ 是纯量; 此外 $\langle P,\ Q\rangle$ 对第一个变量是线性的, 对第二个变量是共轭线性的, 而且是 Hermite 对称的. 那么, 为了证明 $\langle P,\ Q\rangle$ 确实是内积, 我们必须证明 $\langle P, P\rangle\geqslant 0$, 且等号仅当 $P=0$ 时成立. 因为当 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)=\beta$ 时, 我们有

4) 当 $n=2$ 时, 空间 $\mathfrak{H}_k$ 由 $\mathfrak{H}^k$ 和 $\mathfrak{H}^{-k}$ 所张成, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$.

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right)x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}=0,$$

而当 $\alpha=\beta$ 时，这个导数等于 $\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!=\alpha!$. 所以，若 $P(x)=\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha x^\alpha$，则有，$\langle P, P\rangle=\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha|^2\alpha!$. 而这最后的表达式当且仅当所有系数 c_α 为 0 时为 0.

我们利用此内积来建立下述基本定理:

定理 2.1 若 $P\in\mathscr{P}_k$，则

$$P(x)=P_0(x)+|x|^2P_1(x)+\cdots+|x|^{2l}P_l(x),$$

其中，P_j 是 $k-2j$ 阶齐次调和多项式，$j=0, 1, \cdots, l$.

证明 因任何低于 2 阶的多项式是调和的，于是我们可以假定 $k\geqslant 2$. 考虑 $\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_{k-2}$ 的线性映射 $\varphi: \varphi(P)=\Delta P$，其中 $P\in\mathscr{P}_k$，Δ 是 Laplace 算子. 我们首先证明，φ 把 $\mathscr{P}_k$ 映到 $\mathscr{P}_{k-2}$ 上. 如若不然，我们就可以找到一个非零的 $Q\in\mathscr{P}_{k-2}$，Q 与 φ 的值域 $\mathscr{R}(\varphi)$ 正交. 就是说，对一切 $P\in\mathscr{P}_k$，

$$\overline{\langle\Delta P, Q\rangle}=\langle Q, \Delta P\rangle=0.$$

特别对 $P(x)=|x|^2Q(x)$，上式也成立. 于是

$$0=\langle Q, \Delta P\rangle=Q(D)\overline{\Delta P}=\Delta Q(D)\overline{P}=P(D)\overline{P}=\langle P, P\rangle.$$

但这是不可能的，因为 $P\neq 0$.

令 $\mathscr{A}_j\subset\mathscr{P}_j(j\geqslant 2)$ 是 $\mathscr{P}_j$ 中的一切调和多项式类. 我们断言，$\mathscr{P}_j$ 是 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{B}_j$ 的正交直和，其中 $\mathscr{B}_j=|x|^2\mathscr{P}_{j-2}=\{P(x)\in\mathscr{P}_j; P(x)=|x|^2Q(x), Q(x)\in\mathscr{P}_{j-2}\}$. 如果 $R(x)=|x|^2Q(x)$，其中 $Q\in\mathscr{P}_{j-2}$，那么，对一切 $Q\in\mathscr{P}_{j-2}$ 有 $\langle R, P\rangle=0$，当且仅当对一切 $Q\in\mathscr{P}_{j-2}$ 有 $Q(D)\Delta\overline{P}=0$，而这后一式成立当且仅当对一切 $Q\in\mathscr{P}_{j-2}$ 有 $\langle Q, \Delta P\rangle=0$，而这一事实成立当且仅当 $\Delta P=0$.

特别地，对 $j=k$ 和 $P\in\mathscr{P}_k$，我们有 $P(x)=P_0(x)+|x|^2Q(x)$，其中 P_0 是调和的且 $Q\in\mathscr{P}_{k-2}$. 再对 $j=k-2$ 应用我们的结果，就得到分解 $Q(x)=P_1(x)+|x|^2Q_1(x)$，其中，P_1 是调和的，$Q_1\in\mathscr{P}_{k-4}$. 于是 $P(x)=P_0(x)+|x|^2P_1(x)+|x|^4Q_1(x)$. 显然，由归纳法就得出定理 2.1. 】

定理 2.1 的一个直接推论是:

推论 2.2 任一 n 元多项式在单位球面 Σ_{n-1} 上的限制，是调和多项式在 Σ_{n-1} 上的限制的和[5].

我们令 $\mathscr{H}_k$ 表示 k 阶球调和函数空间. $\mathscr{H}_k$ 与一切 $\mathscr{A}_k$ 的元素在 Σ_{n-1} 上的限制的全体相重合. 若考虑 $\mathscr{A}_k$ 中的 P 的限制 Y (对$x'\in\Sigma_{n-1}$, $Y(x')=P(x')$), 那么, 由于 P 的齐次性, 对 $x\neq 0$ 有 $P(x)=|x|^kY(x/|x|)$. 于是, 限制映射 $P\to Y$ 有一个平凡核, 因而必是 $\mathscr{A}_k$ 到 $\mathscr{H}_k$ 上的同构. 特别地, 对 $k\geqslant 2$, 有

$$\dim\mathscr{H}_k=\dim\mathscr{A}_k=\dim\mathscr{P}_k-\dim\mathscr{P}_{k-2}=d_k-d_{k-2}$$

$$=\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-3}{k-2}.$$

此外, $\dim\mathscr{H}_0=d_0=1$, $\dim\mathscr{H}_1=d_1=n$. 在本节开始我们曾看到, 当 $n=2$ 时, 空间 $\mathscr{H}_k$ 是由两个函数 $\cos k\theta$ 与 $\sin k\theta$ 所张成的. 那么, 对一切 $k\geqslant 1$, 有 $\dim\mathscr{H}_k=2$. 这与我们刚刚得到的结果是一致的:

$$\binom{2+k-1}{k}-\binom{k-1}{k-2}=(k+1)-(k-1)=2.$$

当 $n=3$ 时, 对于 $k\geqslant 0$, 我们得到 $\dim\mathscr{H}_k=2k+1$.

空间 $\mathscr{A}_k$ 叫作球体调和函数空间. 有时, 为了强调 $\mathscr{H}_k$ 和 $\mathscr{A}_k$ 的区别, $\mathscr{H}_k$ 的元素称作球面调和函数.

推论 2.3 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$ 中元素的一切有限线性组合所成之集是

(i) 在 Σ_{n-1} 上的连续函数空间中按 L^∞ 范数稠密.

(ii) 在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中稠密.

证明 因为连续函数空间在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中稠密, 所以容易看出(i)蕴含(ii): 给定 $\varepsilon>0$ 和 $f\in L^2(\Sigma_{n-1})$, 取一连续函数 g, 使得 $\|f-g\|_2<\varepsilon/2$. 如果(i)成立, 我们就可以找到一个 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$ 中元素

5) 读者应注意到, 当 $n=2$ 时, 从本节开始时所做的考察, 很容易推得这一事实.

的有限线性组合 h,使 $\|g-h\|_\infty<\varepsilon/(2\sqrt{\omega_{n-1}})$. 于是,

$$\|f-h\|_2\leqslant\|f-g\|_2+\|g-h\|_2<\varepsilon/2+\sqrt{\omega_{n-1}}\|g-h\|_\infty$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

另一方面,(i)可由Weierstrass逼近定理推得:若 g 在 Σ_{n-1} 上连续,我们可以用限制在 Σ_{n-1} 上的多项式一致逼近它.但依(2.2),这些限制都是 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$ 中元素的有限线性组合. 】

推论 2.4 若 $Y^{(k)}$ 和 $Y^{(l)}$ 分别是 k 阶和 l 阶球调和函数, $k\neq l$, 则

$$\int_{\Sigma_{n-1}}Y^{(k)}(x')\overline{Y^{(l)}(x')}\,dx'=0.$$

证明 对于 $x\in E_n$ 且 $x\neq0$, 令 $r=|x|$, $x'=x/r$. 我们定义:当 $x\neq0$ 时, $u(x)=r^kY^{(k)}(x')$, $v(x)=r^lY^{(l)}(x')$; 若 $x=0$, 当 k,l 皆非 0 时,定义 $u(0)=0=v(0)$, 而若(譬如说) $k=0$, 则 $Y^{(k)}$ 是常数函数,我们就定义 $u(0)$ 是这个常数. u、v 在 $x'\in\Sigma_{n-1}$ 处的外法向方向导数是 $(dr^k/dr)Y^{(k)}(x')=kY^{(k)}(x')$, $(dr^l/dr)Y^{(l)}(x')=lY^{(l)}(x')$. 此外, 由于 $Y^{(k)}$ 和 $Y^{(l)}$ 是球(面)调和函数, 所以 u 和 v 是球体调和函数. 于是由 Green 定理,

$$0=\int_{|x|\leqslant1}(u\Delta\bar v-\bar v\Delta u)\,dx=\int_{\Sigma_{n-1}}\left(u\frac{\partial\bar v}{\partial r}-\bar v\frac{\partial u}{\partial r}\right)dx'$$
$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\left(lY^{(k)}(x')\overline{Y^{(l)}(x')}-kY^{(k)}(x')\overline{Y^{(l)}(x')}\right)dx'$$
$$=(l-k)\int_{\Sigma_{n-1}}Y^{(k)}(x')\overline{Y^{(l)}(x')}\,dx'.$$

因 $l\neq k$, 用 $(l-k)$ 除上式,就得到所要的结论. 】

我们把 $\mathscr{H}_k$ 看作 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中一个具有内积

$$(f,\ g)=\int_{\Sigma_{n-1}}f(x')\overline{g(x')}\,dx'$$

的子空间. 若 $\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ $(a_k=d_k-d_{k-2})$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的正交基,那么,从推论 2.4 知,集合 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ 是 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 的正交基.

这是因为，如果有 $f\neq 0$ 与所有这些元素都正交，则当 h 是 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$ 中元素的有限线性组合时，

$$\begin{aligned}\|f-h\|_2^2&=\|f\|_2^2-(f,\ h)-(h,\ f)+\|h\|_2^2\\&=\|f\|_2^2+\|h\|_2^2\geqslant\|f\|_2^2>0.\end{aligned}$$

但是，依推论2.3之(ii)知道，这是不可能的．于是，当 $f\in L^2(\Sigma_{n-1})$ 时，存在有 f 的一个唯一表达式

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)},\tag{2.5}$$

其中，右端的级数按 L^2 范数收敛于 f，且 $Y^{(k)}\in\mathscr{H}_k$．实际上，$Y^{(k)}=b_1^{(k)}Y_1^{(k)}+b_2^{(k)}Y_2^{(k)}+\cdots+b_{a_k}^{(k)}Y_{a_k}^{(k)}$，$b_j^{(k)}=(f,\ Y_j^{(k)})$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ a_k$．对于 $n=2$，(2.5) 中的级数就是 f 的 Fourier 级数．此时，

$$Y_1^{(k)}(e^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\theta$$

和

$$Y_2^{(k)}(e^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\theta$$

组成 $\mathscr{H}_k$ 的一个正交基．

在 Fourier 级数理论中，函数 $Y_1^{(k)}$ 起着特殊的作用．例如，可积周期函数 f 的 Fourier 级数的 Abel 平均

$$u(r,\ \theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kr^{|k|}e^{ik\theta},\ 0\leqslant r<1,$$

就可以用 $Y_1^{(k)}$ 和 f 简单地表达出来．更确切地说，利用三角基本公式

$$\cos(\theta-\phi)=\cos\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta\tag{2.6}$$

可知

$$u(r,\ \theta)=\int_0^{2\pi}f(\phi)p(r,\ \theta-\phi)d\phi,$$

其中，

$$p(r,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\theta\right\}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\tag{2.7}$$

是单位圆上的 Poisson 核(见第二章定理1.9)．现在我们来证明，在高维情形中也有类似的结果．为了避免 $n=1$ 和 $n=2$ 时的

某些例外(我们已在前面处理过了),此后在本节的其余部分中,我们皆假定 $n>2$.

固定 Σ_{n-1} 中的一个点 x',考虑定义在$\mathscr{H}_k$上的线性泛函 L,它在 $Y\in\mathscr{H}_k$ 的值是 $Y(x')$. 根据有限维内积空间 $\mathscr{H}_k$ 的自对偶性,必存在唯一的球调和函数 $Z_{x'}^{(k)}$,使对一切 $Y\in\mathscr{H}_k$,有

$$L(Y)=Y(x')=\int_{\Sigma_{n-1}} Y(t')Z_{x'}^{(k)}(t')dt'.$$

函数 $Z_{x'}^{(k)}$ 叫作以 x' 为极的 k 阶带调和函数. 我们现在来建立带调和函数的一些初等而基本的性质.

引理 2.8 (a) 若 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{a_k}\}$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的正交基,则

$$Z_{x'}^{(k)}(t')=\sum_{m=1}^{a_k}\overline{Y_m(x')}\,Y_m(t');$$

(b) $Z_{x'}^{(k)}$ 是实值的,且 $Z_{x'}^{(k)}(t')=Z_{t'}^{(k)}(x')$;

(c) 若 ρ 是一个旋转,则 $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')=Z_{x'}^{(k)}(t')$.

证明 由于 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{a_k}\}$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的正交基,故我们有

$$Z_{x'}^{(k)}=\sum_{m=1}^{a_k}(Z_{x'}^{(k)}, Y_m)Y_m.$$

但根据带调和函数的定义,

$$(Z_{x'}^{(k)}, Y_m)=\int_{\Sigma_{n-1}}\overline{Y_m(t')}\,Z_{x'}^{(k)}(t')dt'=\overline{Y_m(x')}.$$

于是(a)得证. 我们导出的 $\mathscr{H}_k$ 维数的公式,与 $\mathscr{H}_k$ 空间由实值函数还是由复值函数组成是无关的. 所以,我们可以把(a)中的正交基选作实值函数. 于是立刻可看出,$Z_{x'}^{(k)}$ 一定是实值的. 则(b)便是(a)的直接推论.

令 $w'=\rho t'$,那么对 $Y\in\mathscr{H}_k$,我们有

$$\int_{\Sigma_{n-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')Y(t')dt'=\int_{\Sigma_{n-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(w')Y(\rho^{-1}w')dw'$$
$$=Y(\rho^{-1}(\rho x'))=Y(x').$$

于是,由线性泛函表示式的唯一性,就有 $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')=Z_{x'}^{(k)}(t')$,(c)得证. 】

推论 2.9 (a) 对一切 $x'\in\Sigma_{n-1}$, $Z_{x'}^{(k)}(x')=a_k\omega_{n-1}^{-1}$, 其中, a_k

是 $\mathscr{H}_k$ 的维数，ω_{n-1} 是 Σ_{n-1} 的表面积.

(b) 对一切 $x' \in \Sigma_{n-1}$，$\sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2 = a_k\omega_{n-1}^{-1}$ 与 $\mathscr{H}_k$ 之正交基 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{a_k}\}$ 的选择无关.

(c) 对一切 Σ_{n-1} 中之 x' 和 t'，$|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant a_k\omega_{n-1}^{-1}$.

证明 设 x_1' 和 x_2' 是 Σ_{n-1} 中之两点. 我们可以找到一个旋转 ρ，使得 $\rho x_1' = x_2'$. 根据引理 2.8 之 (c)，我们定有

$$Z_{x_2'}^{(k)}(x_2') = Z_{x_1'}^{(k)}(x_1').$$

因而，$Z_{x'}^{(k)}(x')$ 是常数，它不依赖于 $x' \in \Sigma_{n-1}$. 从引理 2.8 的 (a) 看出，这个常数 c 一定等于 $\sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2$，这里，$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{a_k}\}$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的一个正交基. 那么，

$$a_k = \sum_{m=1}^{a_k} \int_{\Sigma_{n-1}} |Y_m(x')|^2 dx' = \int_{\Sigma_{n-1}} \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2 dx'$$

$$= \int_{\Sigma_{n-1}} c dx' = c\omega_{n-1}.$$

于是 $c = a_k\omega_{n-1}^{-1}$. 这就证明了 (a) 和 (b).

为了证明 (c)，我们首先注意到：按照带调和函数的定义，对 Σ_{n-1} 上之 t' 和 x'，有

(i) $$Z_{t'}^{(k)}(x') = \int_{\Sigma_{n-1}} Z_{t'}^{(k)}(w') Z_{x'}^{(k)}(w') dw'.$$

另一方面，如果 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{a_k}\}$ 是 $\mathscr{H}_k$ 的一个正交基，那么，根据引理2.8之(a)和我们刚刚得到的结果可知，对于一切 $u' \in \Sigma_{n-1}$，有

$$\|Z_{u'}^{(k)}\|_2^2 = \int_{\Sigma_{n-1}} |Z_{u'}^{(k)}(w')|^2 dw' = \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(u')|^2 = a_k\omega_{n-1}^{-1}.$$

于是，由 (i)、Schwarz 不等式和上一等式，可得

$$|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant \|Z_{t'}^{(k)}\|_2 \cdot \|Z_{x'}^{(k)}\|_2 = \sqrt{a_k\omega_{n-1}^{-1}} \sqrt{a_k\omega_{n-1}^{-1}} = a_k\omega_{n-1}^{-1}.$$

推论的最后一部分得证[6]. 】

---

6) 读者应当注意到，当 $n=2$ 时，引理 2.8 和推论 2.9 化为熟知的三角函数初等性质. 例如，引理 2.8(a) 基本上是等式 (2.6)，推论 2.9(b) 是等式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

的推广.

从公式(2.7)可以看出单位圆上的 Poisson 核如何用带调和函数来表示. 我们现在来证明, 在 n 维中也可以这样来表示. 我们回想(见第二章定理 1.9) E_n 中单位球上的 Poisson 核是如下给出的: 当 $0 \leqslant |x| < 1 = |t'|$,

$$p(t', x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-|x|^2}{|x-t'|^n}.$$

定理 2.10 设 $x = rx'$, $r = |x| < 1$, 则对一切 $t' \in \Sigma_{n-1}$,

$$p(t', x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{t'}^{(k)}(x').$$

证明 因为

$$a_k = d_k - d_{k-2} = \{(n+2k-2)/k\} \binom{n+k-3}{k-1}$$

是小于或等于 $k^{(n-2)}$ 的常数倍, 再依推论 2.9(c), 便推知级数

$$q(t', x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{t'}^{(k)}(x')$$

在每个闭区域 $\{x \in E_n;\ |x| \leqslant r_0 < 1\}$ 中一致收敛. 现在, 我们设 $u(t') = \sum_{j=0}^{m} Y_j(t')$ 是球调和函数($Y_j \in \mathscr{H}_j$)的有限线性组合. 那么, 根据第二章定理 1.10 和球调和函数的定义以及 Dirichlet 问题解的唯一性, 函数

$$\sum_{j=0}^{m} |x|^j Y_j(x') = u(x) = \int_{\Sigma_{n-1}} u(t') p(t', x)\, dt'$$

必定在 $|x| \leqslant 1$ 上连续; 在 $|x| < 1$ 上调和; 且在 $|x'| = 1$ 上等于 $u(x')$. 而由引理 2.8(b) 和带调和函数的定义, 以及推论 2.4 的正交关系, 可得,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{n-1}} u(t') q(t', x)\, dt' &= \sum_{j=0}^{m} \int_{\Sigma_{n-1}} Y_j(t') q(t', x) dt' \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \int_{\Sigma_{n-1}} Y_j(t') Z_{t'}^{(k)}(x') dt' \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m} |x|^j Y_j(x') = u(x).
\end{aligned}$$

于是, 对于球调和函数的一切有限线性组合, 有

$$\int_{\Sigma_{n-1}}[p(t',\ x)-q(t',\ x)]u(t')dt'=0.$$

又因球调和函数的一切有限线性组合在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中是稠密的(推论 2.3 之(ii)),而且 $p(t',\ x)$ 和 $q(t',\ x)$ 都是 t' 的连续函数,所以 $p(t',\ x)=q(t',\ x)$. 从而定理得证. 】

我们可以用简单的几何性质来刻划带调和函数. 为了描述这一性质,对于 $e\in\Sigma_{n-1}$,我们把与原点和 e 的连线相垂直的超平面和单位球的相交部份,定义为 Σ_{n-1} 的正交于点 e 的平行截形. 若 ρ 是使 e 保持不动的旋转,则由引理 2.8 之(c)推知,对一切 $x'\in\Sigma_{n-1}$,有 $Z_e^{(k)}(x')=Z_e^{(k)}(\rho x')$. 然而这样的旋转 ρ,显然把正交于 e 的平行截形映射到自身. 此外,在这个平行截形上给定两点 x_1' 和 x_2',按照二维的情形就可知道,存在一个旋转 ρ,它使 e 保持不动,且使 $\rho x_1'=x_2'$ (因可选 ρ,它使固定的 x_1'、x_2' 所张成的平面的正交补保持不动). 从而,以 e 为极的带调和函数 $Z_e^{(k)}$ 在 Σ_{n-1} 的正交于 e 的平行截形上就是常数. 我们来证明,这一性质刻划了带调和函数(最多差一常数倍). 首先注意到,这样的函数在使 e 不动的旋转变换下是不变的. 为了利用这一点,我们还需要下面的结果.

引理 2.11 设 P 是 $E_n(n\geqslant 2)$ 上的多项式,它对一切旋转 ρ 和点 $x\in E_n$,有 $P(\rho x)=P(x)$,则存在常数 $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$,使

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^k.$$

证明 我们总可以记 $P(x)=\sum_{l=0}^{j}P_l(x)$,其中 P_l 是 l 阶齐次的. 那么,对于任一 $\varepsilon>0$ 和每个旋转 ρ,有

$$\sum_{l=0}^{j}\varepsilon^l P_l(x)=P(\varepsilon x)=P(\varepsilon\rho x)=\sum_{l=0}^{j}\varepsilon^l P_l(\rho x).$$

因而必有 $P_l(\rho x)=P_l(x),\ l=0,1,\cdots,j$. 若令 $F(x)=|x|^{-l}P_l(x)$,则 F 是 0 阶齐次函数,它对旋转变换群是不变量(即,对一切旋转 ρ, $F(\rho x)=F(x)$). 这就推出 F 是常数函数: 对一切 $x\in E_n$,

$F(x)=c_l'$. 于是就有 $P_l(x)=c_l'|x|^l$. 又因 P_l 是个多项式, 所以在 $c_l'\neq 0$ 时, l 一定是偶数. 这样就有

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k|x|^{2k},$$

其中, $c_k=c'_{2k}$, $k=0, 1, 2, \cdots, m$, m 是不超过 $j/2$ 的最大整数. 】

定理2.12 设 e 是 Σ_{n-1} 的一点, 那么, $Y\in\mathscr{H}_k$ 在 Σ_{n-1} 的正交于 e 的平行截形上是常数, 当且仅当有一常数 c, 使 $Y=cZ_e^{(k)}$.

证明 我们已经证明带调和函数具有这一性质. 故假定 Y 在 Σ_{n-1} 的正交于 e 的平行截形上是常数. 如果 $e_1=(1, 0, \cdots, 0)\in\Sigma_{n-1}$, τ 是使 $e=\tau e_1$ 的旋转, 则其值为 $W(x')=Y(\tau x')$ 的球调和函数 W, 在 Σ_{n-1} 的正交于 e_1 的平行截形上是常数. 如果我们能证明 $W=cZ_{e_1}^{(k)}$, 则由引理 2.8(c) 可知, 对一切 $y'\in\Sigma_{n-1}$, 有

$$Y(y')=W(\tau^{-1}y')=cZ_{e_1}^{(k)}(\tau^{-1}y')=cZ_{\tau^{-1}e}^{(k)}(\tau^{-1}y')=cZ_e^{(k)}(y').$$

因而, 我们只需证明 $W=cZ_{e_1}^{(k)}$.

设对 $x\neq 0$, $P(x)=|x|^kW(x/|x|)$, 以及 $P(0)=0$. 则当 ρ 是使 e_1 不动的旋转时, 对一切 $x\in E_n$, 成立着 $P(\rho x)=P(x)$, 并且所有形如 x_1^m, $m=0, 1, 2, \cdots$, 的多项式也是在 ρ 的作用下不变的. 因之, 若记

$$P(x)=\sum_{j=0}^{k}x_1^{k-j}P_j(x_2, x_3, \cdots, x_n),$$

则知 $P_0, P_1, \cdots, P_k$ 在 ρ 的作用下是不变的 (注意, $\rho(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(x_1, x_2', \cdots, x_n')$ 和映射 $(x_2, \cdots, x_n)\to(x_2', \cdots, x_n')$ 是 $(n-1)$ 维空间上的旋转 $(x_1=0)$, 而且, 用这种办法, 我们取遍一切使 e_1 保持不动的旋转, 就得到 $(n-1)$ 维空间的一切旋转). 所以, 由引理 2.11, 当 j 是奇数时, P_j 是 0; 而当 j 是偶数时, $P_j=(x_2, \cdots, x_n)=c_j(x_2^2+\cdots+x_n^2)^{j/2}$. 于是, 令 $R=(x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$, 这就证明了

$$\text{(i)}\qquad P(x)=c_0x_1^k+c_2x_1^{k-2}R^2+\cdots+c_{2l}x_1^{k-2l}R^{2l}.$$

因 W 是球面调和的, 故多项式 P 定是球体调和的. 因此,

$$0=\Delta P(x)=\sum_{j=0}^{l-1}[c_{2j}\alpha_j+c_{2(j+1)}\beta_j]x_1^{k-2(j+1)}R^{2j},$$

其中，$\alpha_j=(k-2j)(k-2j-1)$，$\beta_j=2(j+1)(n+2j-1)$. 因此，$c_{2(j+1)}=-(\alpha_j/\beta_j)c_{2j}$, $j=0, 1, 2, \cdots, l-1$. 这就是说，一切系数 $c_0, c_2, \cdots, c_{2l}$, 都是由 c_0 确定的. 因而任何两个形如(i)的非0调和多项式一定互为常数倍 另一方面，我们已经证明，任何 k 阶齐次多项式，它在 Σ_{n-1} 的正交于 e_1 的平行截形上的限制若是常数的话，就一定有(i)的形式. 因为 $Z_{e_1}^{(k)}(x/|x|)|x|^k$ 具有这一性质，并且是调和的，所以对一切 $x'\in\Sigma_{n-1}$，有 $W(x')=P(x')=cZ_{e_1}^{(k)}(x')$. 定理证毕. 】

推论 2.13 假设对一切 x', $y'\in\Sigma_{n-1}$ 定义了 $F_{y'}(x')$, 且

(a) 对每个 $y'\in\Sigma_{n-1}$, $F_{y'}$ 是 k 阶球调和函数,

(b) 若 ρ 是一个旋转，则 $F_{\rho y'}(\rho x')=F_{y'}(x')$. 那么，存在一个常数 c, 使 $F_{y'}(x')=cZ_{y'}^{(k)}(x')$ 对一切 x', $y'\in\Sigma_{n-1}$ 成立.

证明 在 Σ_{n-1} 中固定 y', 并设 ρ 是使 y' 不动的一个旋转. 则根据(b)，对一切 $x'\in\Sigma_{n-1}$, 我们有

$$F_{y'}(x')=F_{\rho y'}(\rho x')=F_{y'}(\rho x').$$

这就意味着，依题设(a)，$F_{y'}$ 是球调和的，它在 Σ_{n-1} 的正交于 y' 的平行截形上是常数. 再根据定理 2.12, 就存在 $c(y')$ 使 $F_{y'}=c(y')Z_{y'}^{(k)}$. 所以，我们只要能证明，对任何 $y_1', y_2'\in\Sigma_{n-1}$, 有 $c(y_1')=c(y_2')$, 就能证明本推论. 为此，我们考虑使 $\sigma y_1'=y_2'$ 的旋转 σ. 利用题设(b)可知,

$$c(y_2')Z_{y_2'}^{(k)}(\sigma x')=F_{y_2'}(\sigma x')=F_{\sigma y_1'}(\sigma x')=F_{y_1'}(x')$$
$$=c(y_1')Z_{y_1'}^{(k)}(x').$$

另一方面，由引理 2.8(c)，有

$$Z_{y_1'}^{(k)}(x')=Z_{\sigma y_1'}^{(k)}(\sigma x')=Z_{y_2'}^{(k)}(\sigma x').$$

因而，$c(y_1')=c(y_2')$. 】

带调和函数可以用超球(或 Gegenbauer)多项式 P_k^λ 特别简单地表示出来. 而超球多项式可以用生成函数来定义. 如果我们记

$$(1-2rt+r^2)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^\lambda(t)\,r^k,$$

这里, $0\leqslant|r|<1$, $|t|\leqslant 1$, $\lambda>0$, 那么, 其系数 $P_k^\lambda(t)$ 就叫作 k 阶 λ 超球多项式. 我们来推导函数 P_k^λ 的一些最基本的性质. 令 $r=0$, 我们看出

(i) $$P_0^\lambda(t)\equiv 1.$$

又因为

$$\begin{aligned}2r\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{\lambda+1}(t)r^k&=2r\lambda(1-2rt+r^2)^{-\lambda-1}\\&=\frac{d}{dt}(1-2rt+r^2)^{-\lambda}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\frac{d}{dt}P_k^\lambda(t),\end{aligned}$$

所以我们有

(ii) $$\frac{d}{dt}P_k^\lambda(t)=2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t),\ k\geqslant 1.$$

从(i)和(ii)就得到 $(d/dt)P_1^\lambda(t)=2\lambda$, 那么, $P_1^\lambda(t)$ 便是一阶多项式. 利用性质(ii)进行归纳论证,我们便知,

(iii) $P_k^\lambda(t)$ 是 t 的 k 阶(恰为 k 阶)多项式. 由此性质又可推知,多项式 $1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^k,\ \cdots$ 可以作为 $P_0^\lambda,\ P_1^\lambda,\ \cdots,\ P_k^\lambda\cdots$ 的有限线性组合而得到. 于是由 Weierstrass 逼近定理就有

(iv) 多项式 $P_k^\lambda(t)$, $k=0,\ 1,\ \cdots$, 的有限线性组合在闭区间 $[-1,\ 1]$ 上的连续函数空间中是一致稠密的.

由于 $$\sum_{k=0}^{\infty}P_k^\lambda(-t)r^k=(1+2rt+r^2)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^\lambda(t)(-r)^k,$$

我们定有

(v) $$P_k^\lambda(-t)=(-1)^kP_k^\lambda(t),\ k\geqslant 0.$$

带调和函数的下述表达式, 就是以上这些性质的简单推论.

定理 2.14 若 $n>2$ 是整数, $\lambda=(n-2)/2$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 则存在常数 $c_{k,n}$, 使得对一切 $x',\ y'\in\Sigma_{n-1}$, 有

$$Z_{y'}^{(k)}(x') = c_{k,n} P_k^{\lambda}(x' \cdot y').$$

证明 对于 $y' \in \Sigma_{n-1}$，令

$$F_{y'}(x) = |x|^k P_k^{\lambda}(x \cdot y'/|x|), \ x \in E_n.$$

我们若能证明 $F_{y'}(x')$ 满足推论 2.13 的假设，就可立即证明本定理. 根据性质(iii)和(v)，当 k 是偶数，譬如说 $k=2m$ 时，$P_k^{\lambda}(t)$ 一定形如 $P_k^{\lambda}(t) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j} t^{2j}$，而当 k 是奇数，譬如说 $k=2m+1$ 时，

$$P_k^{\lambda}(t) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j+1} t^{2j+1}.$$

于是，在前一情形中，

$$|x|^k P_k^{\lambda}\left(\frac{x \cdot y'}{|x|}\right) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{m-j} (x_1 y_1' + \cdots + x_n y_n')^{2j},$$

在第二种情形中，

$$|x|^k P_k^{\lambda}\left(\frac{x \cdot y'}{|x|}\right) = \sum_{j=0}^{m} d_{2j+1} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{m-j} (x_1 y_1' + \cdots + x_n y_n')^{2j+1}.$$

无论是哪种情形，$F_{y'}(x)$ 都是 k 阶(非零)齐次多项式.

若 ρ 是一个旋转，则因它保持内积，故对一切 x', $y' \in \Sigma_{n-1}$，有

$$F_{\rho y'}(\rho x') = P_k^{\lambda}(\rho x' \cdot \rho y') = P_k^{\lambda}(x' \cdot y') = F_{y'}(x').$$

因而推论 2.13 的条件(b)就被满足. 于是只需证明 $F_{y'}$ 是调和的. 我们已经看到(见第二章 § 1 开始时的例 3、例 5)，$|x+x_0|^{2-n}$ 在区域 $E_n - \{x_0\}$ 上是 x 的调和函数. 特别地，对于 $s \neq 0$ 和固定的 $y' \in \Sigma_{n-1}$，

$$\text{(2.15)} \quad s^{2-n} \left| x - \frac{y'}{s} \right|^{2-n} = \left[1 - 2s|x|\left(\frac{x}{|x|} \cdot y'\right) + (s|x|)^2 \right]^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s^k |x|^k P_k^{\lambda}\left(\frac{x}{|x|} \cdot y'\right)$$

在区域 $\mathscr{R} = \mathscr{R}_s = \{x \in E_n; 0 < |x| < 1/s\}$ 上是调和的. 而这就推出每个系数 $F_{y'}(x) = |x|^k P_k^{\lambda}(x \cdot y'/|x|)$ 一定是 x 的调和函数. 此事可在以 x 为心且含于 $\mathscr{R}_s$ 内的球上对等式 (2.15) 两端取平均值而得到. 由于(2.15)的左端对 $0 < s \leqslant s_0 < \infty$ 满足平均值性质 (第二

章定理 1.1)，那么，每个系数 $F_{y'}(x)=|x|^{k}P_k^{\lambda}(x\cdot y'/|x|)$ 也必满足平均值性质. 由此以及第二章定理 1.7，我们可以推出所需的结果，即 $F_{y'}$ 是调和的. 】

用超球多项式可以得出函数的一些重要的正交展开. 为实现这一展开所需的基本的正交性，是上面这个定理的简单推论.

推论 2.16 关于内积

$$(f,\ g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt,$$

多项式 $P_k^{(n-2)/2}(t)$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，是相互正交的.

证明 设 $e=(1,0,\cdots,0)$，又对于 $x'\in\Sigma_{n-1}$，定义 θ：$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$e\cdot x'=\cos\theta$. 为计算在 Σ_{n-1} 上的积分，我们可以先在正交于 e 的平行截形 $L_\theta=\{x'\in\Sigma_{n-1};\ e\cdot x'=\cos\theta\}$ 上积分，从而得出一个 θ 的函数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，这一函数是在区间 $[0,\ \pi]$ 上可积的. L_θ 的测度是 $\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}$（$E_{n-2}$ 中半径为 $\sin\theta$ 的球面面积）. 由此连同推论 2.4、定理 2.12 和 2.14，我们就得到

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Sigma_{n-1}}Z_e^l(x')Z_e^k(x')dx'\\&=c_{l,n}c_{k,n}\omega_{n-2}\int_0^{\pi}P_l^{(n-2)/2}(\cos\theta)P_k^{(n-2)/2}(\cos\theta)(\sin\theta)^{n-2}d\theta\\&=\omega_{n-2}c_{l,n}c_{k,n}\int_{-1}^{1}P_l^{(n-2)/2}(t)P_k^{(n-2)/2}(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}dt.\end{aligned}$$ 】

由这些结果和超球多项式的性质(iv)，我们又得

推论 2.17 多项式 $P_k^{(n-2)/2}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，组成空间 $L^2([-1,\ 1];\ (1-t^2)^{(n-3)/2}dt)$[7] 的正交基.

我们主要以球面上函数的观点研究了球调和函数. 现在我们来说明，怎样把它们用于 E_n 上函数的 Fourier 分析. 更明确地说，我们将研究 $L^2(E_n)$ 的子空间 $\mathfrak{H}_k$. 回想一下，$\mathfrak{H}_k$ 是形如 $f(r)P(x)$ 函

7) 推论 2.16 和 2.17 不仅对 $\lambda=(n-2)/2$ 是成立的，而且对一切 $\lambda>0$ 成立. 但这需要另外的证明.

数的一切线性组合的空间，$f(r)P(x)$ 属于 $L^2(E_n)$，其中 f 遍及一切径向函数，P 遍及一切 k 阶球体调和函数.

作为 §3 内容的准备，我们现在来给出以下引理.

引理 2.18 在下述含义下，直和分解 $L^2(E_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}_k$ 成立：

(a) 各子空间 $\mathfrak{H}_k$ 是闭的；

(b) $\mathfrak{H}_k$ 相互正交；

(c) 每个 $L^2(E_n)$ 的元素是 $\mathfrak{H}_k$ 中元素的有限线性组合的极限. 而且 Fourier 变换将 $\mathfrak{H}_k$ 映入自身.

证明 与 $\mathscr{H}_k$ 同构的 k 阶球体调和函数空间的维数(有限)是 $a_k=d_k-d_{k-2}$. 设 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{a_k}$ 是这空间的标准正交基(其中之内积沿用 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 的内积). 那么，显然 $\mathfrak{H}_k$ 的每个元素都可以写作 $\sum_{j=1}^{a_k} f_j(r)P_j(x)$，而且

$$\int_{E_n}|f(x)|^2dx=\sum_{j=1}^{a_k}\int_0^{\infty}|f_j(r)|^2r^{2k+n-1}\,dr.$$

由此，(a)立即可得. $\mathfrak{H}_k$ 的相互正交性也立即从球调和函数的正交性(推论 2.4)和对极坐标的一次积分而得. 为证明完全性(c)，我们只需证明，当 $L^2(E_n)$ 的函数与所有 $\mathfrak{H}_k$ 的函数正交时，它必几乎处处为 0. 然而由球面上球调和函数的完全性可知，这样的函数在几乎每个以原点为心的球面上必定几乎处处为 0，这就给出了我们的结论. 】

我们将在下一节中讨论 $\mathfrak{H}_k$ 上的 Fourier 变换. 不过，经一个初等的推理，我们就能证明 Fourier 变换使 $\mathfrak{H}_k$ 保持不变. 为此，我们只需考虑形如 $f(u)=f_0(\rho)P(u)=\rho^k f_0(\rho)Y(u')$ 的函数 $f\in L^1(E_n)\cap L^2(E_n)$，其中 $Y\in\mathscr{H}_k$，$\rho=|u|$，$u=\rho u'$. 因为这些函数的有限线性组合在 $\mathfrak{H}_k$ 中稠密，所以只要当 f 有以上形式时，能有 $\hat{f}\in\mathfrak{H}_k$，便说明 $\mathfrak{H}_k$ 在 Fourier 变换下保持不变. 令 $r=|x|$，$x=rx'$，我们得到

$$\hat f(x)=\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot u} f(u)\,du$$

$$=\int_0^\infty f_0(\rho)\rho^{k+n-1}\left\{\int_{\Sigma_n} e^{-2\pi i r\rho x'\cdot u'}Y(u')\,du'\right\}d\rho.$$

如果我们能证明存在一个$[0,\infty)$上的函数φ,对$s\geqslant 0$,有

$$\text{(2.19)}\qquad \int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'}Y(u')\,du'=\varphi(s)Y(x'),$$

那么,
$$\hat f(x)=\left\{\int_0^\infty f_0(\rho)\varphi(r\rho)\rho^{k+n-1}\,d\rho\right\}Y(x').$$

因而,$\hat f\in\mathfrak{H}_k$.

由带调和函数$Z_{u'}^{(k)}(v')$的定义和性质$Z_{u'}^{(k)}(v')=Z_{v'}^{(k)}(u')$,我们定有

$$\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'}Y(u')du'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'}\left\{\int_{\Sigma_{n-1}} Y(v')Z_{u'}^{(k)}(v')dv'\right\}du'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}} Y(v')\left\{\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'}Z_{v'}^{(k)}(u')du'\right\}dv'.$$

我们若用$F_{x'}(v')$表示上式末端括号中的表达式,那么,应用Fubini定理和推论2.4可知,$F_{x'}$作为$v'\in\Sigma_{n-1}$的函数与一切空间$\mathscr{H}_j(j\neq k)$正交.但由(2.5)推得$F_{x'}\in\mathscr{H}_k$.根据引理2.8之(c)并经变量代换$u'=\sigma w'$,得知,对一切旋转σ,有$F_{\sigma x'}(\sigma v')=F_{x'}(v')$.于是依推论2.13, 就存在一个数$c(=\varphi(s))$, 使对一切$x'$, $v'\in\Sigma_{n-1}$,有$F_{x'}(v')=cZ_{x'}^{(k)}(v')$. 从而

$$\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'}Y(u')\,du'=\int_{\Sigma_{n-1}} Y(v')F_{x'}(v')dv'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}} Y(v')\varphi(s)Z_{x'}^{(k)}(v')dv'$$

$$=\varphi(s)Y(x').$$

(2.19)成立.

§ 3 空间 $\mathfrak{H}_k$ 上的 Fourier 变换

我们已经证明径向函数的 Fourier 变换是径向函数(见推论 1.2). 在二维情形中,我们已经得到关于这两个径向函数的显式关系式(定理 1.6 当 $k=0$ 的特殊情形). 这一关系可以很自然地推广到 $n>2$ 维,并且象在二维情形一样,这个公式包含着 Bessel 函数. 我们将证明这个 Bessel 函数是 $J_{(n-2)/2}$. 当 n 是奇数时, $(n-2)/2$ 不是整数. 此时, $J_{(n-2)/2}$ 就不是 § 1 中所引进的函数. 但是我们将指出,对 § 1 中引进的 Bessel 函数类有一种自然的推广办法,使它包含我们将要遇到的函数. 为此,我们建立以下等式 (Bessel 函数的 Poisson 表达式):

引理 3.1 若 k 是非负整数,则

$$J_k(t)=\frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds.$$

证明 定义

$$J_k^*(t)=\frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds.$$

由 J_0 的定义(见 § 1)及变量代换 $s=\sin\theta$, 我们立即得到 $J_0^*=J_0$. 因此,我们若能证明序列 $\{J_k\}$ 和 $\{J_k^*\}$ 都满足递推关系

$$(3.2)\quad \frac{d}{dt}(t^{-k}G_k(t))=-t^{-k}G_{k+1}(t),\ t\neq 0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

引理就能成立. 但是我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(t^{-k}J_k(t))\\
&=-t^{-k}\left\{\frac{k}{t}J_k(t)-J_k'(t)\right\}\\
&=-t^{-k}\left\{\frac{k}{2\pi t}\int_0^{2\pi}e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d}{dt}e^{it\sin\theta}\right)e^{-ik\theta}\,d\theta\right\}\\
&=-\frac{t^{-k}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{i\frac{d}{d\theta}\left[\frac{e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}}{t}\right]\right.
\end{aligned}$$

$$+\cos\theta e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}-i\sin\theta e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}\Big\}d\theta$$

$$=-\frac{t^{-k}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{it\sin\theta}e^{-i(k+1)\theta}\,d\theta$$

$$=-t^{-k}J_{k+1}(t).$$

而利用分部积分及$\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)$，我们又得

$$\frac{d}{dt}(t^{-k}J_k^*(t))$$

$$=\frac{2^{-k}i}{\Gamma[(2k+1)/2]\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{its}s(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds$$

$$=\frac{2^{-k}i}{\Gamma[(2k+1)/2]\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{2it}{(2k+1)}e^{its}\frac{(1-s^2)^{(2k+1)/2}}{2}\,ds$$

$$=-t^{-k}J_{k+1}^*(t).$$ 】

引理3.1中出现的积分对一切实数$k>-\frac{1}{2}$是有意义的．如果我们对大于$-\frac{1}{2}$的k定义 Bessel 函数J_k:

$$J_k(t)=\frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds,\ t>0,$$

我们就得到一个比第1节中所考虑的更广的函数类．

现设f是$L^1(E_n)$的径向函数，那么对E_n中几乎一切x，有$f(x)=f_0(|x|)$，其中$\int_0^\infty|f_0(r)|r^{n-1}\,dr<\infty$．于是 Fourier 变换$\hat{f}$也是径向的．因而对一切$x\in E_n$，有$\hat{f}(x)=F_0(|x|)$．这样，当$r=|x|$，$x=rx'$，$s=|u|$和$u=su'$时，我们有

$$F_0(r)=\hat{f}(x)=\int_{E_n}f(u)e^{-2\pi ix\cdot u}\,du$$

$$=\int_0^\infty f_0(s)\left\{\int_{\Sigma_{n-1}}e^{-2\pi irs(x'\cdot u')}\,du'\right\}s^{n-1}ds.$$

我们可以用证明推论2.16时所用的方法来计算内层积分：首先在正交于x'的平行截形$L_\theta=\{u'\in\Sigma_{n-1};\,x'\cdot u'=\cos\theta\}$上积分，得到

一个 θ 的函数, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 再在区间 $[0, \pi]$ 上对 θ 积分. 这样, 由于 $e^{-2\pi irs(x'\cdot u')}=e^{-2\pi irs\cos\theta}$ 在 L_θ 上是常数, 且平行截形的测度是 $\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}=(2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma[(n-1)/2])(\sin\theta)^{n-2}$, 就有

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi irs(x'\cdot u')}\,du' &= \int_0^\pi e^{-2\pi irs\cos\theta}\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta \\ &= \omega_{n-2}\int_{-1}^{1} e^{2\pi irs\xi}(1-\xi^2)^{(n-3)/2}\,d\xi \\ &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}\Gamma[(n-1)/2]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma[(n-1)/2]\,(\pi rs)^{(n-2)/2}} \\ &\quad\times J_{(n-2)/2}(2\pi rs) \\ &= 2\pi(rs)^{-(n-2)/2}J_{(n-2)/2}(2\pi rs).\end{aligned}$$

所以我们得到以下结果:

定理 3.3 设 f 是 $L^1(E_n)$ 中的径向函数, $n\geqslant2$, 因而对几乎一切 $x\in E_n$, $f(x)=f_0(|x|)$. 则 Fourier 变换 $\hat{f}$ 也是径向的, 并对一切 $x\in E_n$ 有 $\hat{f}(x)=F_0(|x|)$, 其中,

$$F_0(|x|)=F_0(r)=2\pi r^{-[(n-2)/2]}\int_0^\infty f_0(s)J_{(n-2)/2}(2\pi rs)s^{n/2}\,ds \text{ [8]}.$$

这个定理表明 Fourier 变换是如何作用在 $\mathfrak{H}_0$ 上的. 我们现在转而来讨论空间 $\mathfrak{H}_k$, $k\geqslant1$. 我们先考察一个重要的函数类上的 Fourier 变换:

定理 3.4 设 $f(u)=e^{-\pi|u|^2}P(u)$, $u\in E_n$, 此处 $P(u)$ 是 k 阶球体调和函数, 则 $\hat{f}(v)=i^{-k}f(v)$, $v\in E_n$.

证明 固定 $t\in E_n$, 我们有

$$\int_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u+t)\,du=\int_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\left\{\int_{\Sigma_{n-1}} P(t+ru')\,du'\right\}dr.$$

因 P 是调和的, 故满足平均值性质(第二章定理 1.1), 于是

$$\int_{\Sigma_{n-1}} P(t+ru')\,du'=\omega_{n-1}P(t).$$

---

8) 在这里和在定理 1.6 中, 我们之所以在 $L^1(E_n)$ 上考虑 Fourier 变换而不在 $L^2(E_n)$ 上来考虑, 是因为这样做所碰到的一切积分就都是按 L^1 意义的. 然而, 这些结果当然都很容易推广到 $L^2(E_n)$ 中.

因而

$$\int_{E_n} e^{-\pi|u|^2} P(u+t)du = P(t)\int_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\omega_{n-1}\,dr$$

$$= P(t)\int_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\left\{\int_{\Sigma_{n-1}} du'\right\}dr$$

$$= P(t)\int_{E_n} e^{-\pi|x|^2}dx = P(t).$$

多项式 $P(t)=P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 显然在 $\boldsymbol{C}_n$ 上有解析延拓. 于是按上述等式,对一切 $z=x+iy=(x_1+iy_1, x_2+iy_2, \cdots, x_n+iy_n)\in\boldsymbol{C}_n$,有

$$\int_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u+z)du = P(z).$$

特别当 $z=-iv$ 时,由于 P 的齐次性可知

$$\int_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u-iv)du = P(-iv) = (-i)^k P(v).$$

再使用 Cauchy 积分定理 n 次,就得

$$\int_{E_n} e^{-\pi(u+iv)\cdot(u+iv)}\, P(u)du = \int_{E_n} e^{-\pi u\cdot u}P(u-iv)du = (-i)^k P(v),$$

其中, $(u+iv)\cdot(u+iv)=\sum_{j=1}^{n}(u_j+iv_j)^2$. 现在再把两端乘 $e^{-\pi|v|^2}$,我们就得到所要求的等式 $\hat{f}(v)=(-i)^k f(v)=i^{-k}f(v)$. 】

定理 3.4 使我们能够在一个更大的函数类上来研究 Fourier 变换的性质. 对 $\alpha>0$,设 $g(x)=e^{-\pi|\alpha x|^2}P(x)=\alpha^{-k}f(\alpha x)$, $x\in E_n$. 如果用 δ_α 表示由 α 确定的伸缩,那么由第一章(1.6)、定理 3.4 和 $P(x)$的齐次性可知,

(3.5)
$$\hat{g}(x)=\alpha^{-k}(\delta_\alpha f)^\wedge(x)=\alpha^{-k}\alpha^{-n}\hat{f}(\alpha^{-1}x)$$
$$=i^{-k}\alpha^{-n-2k}e^{-\pi|x|^2/\alpha^2}P(x).$$

另一方面,如果 h 是一径向函数,当 $x\in E_{n+2k}$ 时,它的值是 $h(x)=e^{-\pi|\alpha x|^2}$,则由第一章定理 1.13 可得

(3.6)
$$\hat{h}(x)=\alpha^{-n-2k}e^{-\pi|x|^2/\alpha^2}.$$

我们可以这样解释上述这两个等式: 设 $\mathscr{D}_m$ 是$(0, \infty)$上函数 φ 的 Hilbert 空间,满足

$$(3.7)\qquad \|\varphi\|=\left(\int_0^\infty |\varphi(r)|^2 r^{m-1}\,dr\right)^{1/2}<\infty.$$

当 $m=n+2k$，且 $P(x)$ 是 k 阶非零球体调和函数时，我们考虑函数 $g(x)=\varphi(|x|)P(x)$，$x\in E_n$. 设 $\|P\|_\Sigma=\left(\int_{\Sigma_{n-1}}|P(x')|^2\,dx'\right)^{1/2}$，则

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2&=\int_{E_n}|\varphi(|x|)P(x)|^2\,dx\\&=\left(\int_0^\infty|\varphi(r)|^2 r^{n+2k-1}\,dr\right)\|P\|_\Sigma^2<\infty.\end{aligned}$$

于是 $g\in L^2(E_n)$，且根据 Plancherel 定理知，$\hat{g}\in L^2(E_n)$，$\|\hat{g}\|_2=\|g\|_2$. 由 g 与 $\hat{g}$ 间的这一范数等式和(2.19)推出，对几乎一切 $x\in E_n$，$\hat{g}(x)=\psi(|x|)P(x)$，且 $\|\psi\|=\|\varphi\|$. 因而，我们得到 $\mathscr{D}_{n+2k}$ 上的一个有界线性算子 T_k^n：$T_k^n\varphi=\psi$(事实上，T_k^n 是等距的). 类似地，我们考虑径向函数 $h(x)=\varphi(|x|)$，$x\in E_{n+2k}$，便得到 $\mathscr{D}_{n+2k}$ 上另一个有界线性算子 T_0^{n+2k}. 为了定义这个算子，我们首先注意到，根据推论 1.2，$\hat{h}$ 也是径向的，也就是说，对几乎一切 $x\in E_{n+2k}$，$\hat{h}(x)=\theta(|x|)$. 令 $T_0^{n+2k}\varphi=\theta$，我们就得到所要求的 $\mathscr{D}_{n+2k}$ 上的有界线性算子(而且，由 Plancherel 定理立即得知，T_0^{n+2k} 也是等距的).

等式(3.5)和(3.6)表明，$T_0^{n+2k}\varphi=i^kT_k^n\varphi$，其中 $\varphi(r)=e^{-sr^2}$，$s>0$. 设 $\mathscr{W}$ 是由 s 取遍一切正实数而得到的一切上述函数 φ 的有限线性组合所成之空间. 那么，若 T_0^{n+2k} 和 $i^kT_k^n$ 限制在空间 $\mathscr{W}$ 上，则它们是一致的. 不难证明，$\mathscr{W}$ 在 Hilbert 空间 $\mathscr{D}_{n+2k}$ 中稠密. 如若不然，我们就能找到一个 $b\in\mathscr{D}_{n+2k}$，它几乎处处不为 0，而对一切 $\varphi\in\mathscr{W}$，有 $\int_0^\infty\varphi(r)b(r)r^{n+2k-1}\,dr=0$. 特别地，对一切 $s>0$，有

$$(3.8)\qquad \int_0^\infty e^{-sr^2}b(r)r^{n+2k-1}\,dr=0.$$

设 Φ 是一函数，当 $s\geqslant0$ 时其值为 $\Phi(s)=\int_0^s e^{-r^2}b(r)r^{n+2k-1}\,dr$. 那

么，在(3.8)中，令 $\varepsilon=(m+1)$，m 是正整数，再用分部积分法积分，我们得到

$$0=\int_0^\infty e^{-mr^2}\Phi'(r)\,dr=2m\int_0^\infty e^{-mr^2}\Phi(r)r\,dr.$$

应用变量代换 $u=e^{-r^2}$，这一等式就等价于

$$0=\int_0^1 u^{m-1}\Phi\left(\sqrt{\log\frac{1}{u}}\right)du,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

由于多项式在[0, 1]上的连续函数空间中一致稠密，所以，对一切 $u\in[0,\ 1]$，只有当 $\Phi\left(\sqrt{\log\frac{1}{u}}\right)=0$ 时，上式成立．于是，对几乎一切 $r\in(0,\ \infty)$，有 $\Phi'(r)=e^{-r^2}b(r)r^{n+2k-1}=0$．此与 $b(r)$ 不几乎处处等于 0 的假设矛盾．

因为算子 T_0^{n+2k} 和 $i^kT_k^n$ 是有界的，且在稠密子空间 $\mathscr{W}$ 上一致，所以它们必定相等．这样我们就证明了

(3.9) $$T_0^{n+2k}\varphi=i^kT_k^n\varphi,\quad 当\ \varphi\in\mathscr{D}_{n+2k}.$$

在定理 3.3 中，我们用含有 Bessel 函数的积分来表示径向函数的 Fourier 变换．现在等式 (2.19) 和 (3.9) 表明，$\mathfrak{H}_k$ 中形如 $f_0(|x|)P(x)$（$P(x)$ 是 E_n 上 k 阶球体调和函数）的函数的 Fourier 变换，可用值为 $h(y)=f_0(|y|)\ (y\in E_{n+2k})$ 的径向函数的 Fourier 变换表示出来．综合这些结果，我们得到下述定理（显然可以推广到 $L^1(E_n)$ 或 $L^2(E_n)$）．

定理 3.10 设 $n\geqslant 2$，$f(x)=f_0(|x|)P(x)$ 是 $L^1(E_n)\cap L^2(E_n)$ 中的函数，其中 $P(x)$ 是 k 阶球体调和函数，则

$$\hat{f}(x)=F_0(|x|)P(x),$$

这里，

$$F_0(r)=2\pi i^{-k}r^{-[(n+2k-2)/2]}\times\int_0^\infty f_0(s)J_{(n+2k-2)/2}(2\pi rs)s^{(n+2k)/2}\,ds.$$

这一定理连同“空间 $\mathfrak{H}_k$ 是由形如 $f_0(|x|)P(x)$ 的函数所张成”这一事实，就给出了 $\mathfrak{H}_k$ 上 Fourier 变换的表征．

描述 $\mathfrak{H}_k$ 上 Fourier 变换的这一等式，很自然地使得我们去研

究 Bessel 函数 $J_m(r)$ 的性质. 当自变量接近原点时，我们有一般的估计 $J_m(r)\sim cr^m$, $r\to 0$. 而当 r 很大时，$J_m(r)$ 的性质就不那么明显了. 它的性质由以下引理给出.

引理 3.11 $J_m(r)=\sqrt{2/\pi r}\cos(r-\pi m/2-\pi/4)+O(r^{-3/2})$, $r\to\infty$. 特别有

(3.12) $$J_m(r)=O(r^{-1/2}),\ r\to\infty\ ^{9)}.$$

证明 按照 $m>-\dfrac{1}{2}$ 时 $J_m(r)$ 的定义，我们需要估计积分

$$I=\int_{-1}^{1} e^{irs}(1-s^2)^{m-\frac{1}{2}}ds.$$

为此，我们考虑复平面上去掉射线 $(-\infty,\ -1)$ 和 $(1,\ \infty)$ 后的单连通区域. 在这一区域中，选 $f(z)=(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}$ 的一个分支，使之在 $[-1,\ 1]$ 上是实值且非负的. 绕以 $[-1,\ 1]$ 为底边、高为 $a>0$ 的矩形，对 $e^{irz}(1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}=e^{ir(x+iy)}(1-[x+iy]^2)^{m-\frac{1}{2}}$ 积分，我们得到

$$0=\int_0^a e^{ir(1+iy)}(y^2-2iy)^{m-\frac{1}{2}}\,diy+\int_{-1}^{1} e^{irs}(1-s^2)^{m-\frac{1}{2}}ds$$
$$+\int_a^0 e^{ir(iy-1)}(y^2+2iy)^{m-\frac{1}{2}}\,diy+\varepsilon(a),$$

其中，当 $a\to\infty$ 时，$\varepsilon(a)\to 0$. 于是

$$-iI=\int_0^\infty e^{ir(iy-1)}(y^2+2iy)^{m-\frac{1}{2}}\,dy-\int_0^\infty e^{ir(1+iy)}(y^2-2iy)^{m-\frac{1}{2}}\,dy$$
$$=I_1-I_2.$$

现因 $$(y^2\pm 2iy)^{m-\frac{1}{2}}=\begin{cases} y^{m-\frac{1}{2}}(\pm 2i)^{m-\frac{1}{2}}+O(y^{m+\frac{1}{2}}), & 0\leqslant y\leqslant 1\\ y^{m-\frac{1}{2}}(\pm 2i)^{m-\frac{1}{2}}+O(y^{2m-1}), & 1\leqslant y<\infty.\end{cases}$$

于是又有

$$I_1=e^{-ir}\int_0^\infty e^{-ry}(2i)^{m-\frac{1}{2}}y^{m-\frac{1}{2}}\,dy+O\left(\int_0^1 e^{-ry}y^{m+\frac{1}{2}}\,dy\right)$$
$$+O\left(\int_1^\infty e^{-ry}y^{2m-1}\,dy\right).$$

---

9) 为后文的需要，我们指出，下面的证明表明，当 m 限制在 $\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$ 的任一有界闭子区间上时，$O(r^{-1/2})$ 和 $O(r^{-3/2})$ 中的界常数对 m 是一致的.

式中第一项是 $(2i)^{m-\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(e^{-ir}/r^{m+\frac{1}{2}})$；第二项是 $O(r^{-m-3/2})(r\to\infty)$；第三项是 $O(e^{-r})(r\to\infty)$. 类似地，$I_2=(-2i)^{m-\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(e^{ir}/r^{m+\frac{1}{2}})+O(r^{-m-\frac{3}{2}})(r\to\infty)$. 由于

$$J_m(r)=\left[(r/2)^m\Big/\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]i(I_1-I_2),$$

综合以上各项，就得到我们所要的结果. 】

§4 一些应用

分析学中的许多重要算子是卷积算子. 即把某个函数空间中的每个函数 f, 映成卷积(函数) $K*f$, 其中 K 是一个固定的函数(或更一般地，是一个缓变广义函数). 我们已经遇到过一些这样的算子. 其一就是 Poisson 积分，其核为

$$K(x)=K_y(x)=c_n y/(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2},\quad y>0$$

(见第一章§1). 若 f 属于 $L^1(E_n)$ (或 $L^2(E_n)$), 那么，由第一章定理1.4和1.14可知，当 $x\in E_n$(或几乎每个 $x\in E_n$)时，有

$$(K*f)^\wedge(x)=e^{-2\pi y|x|}\hat{f}(x).$$

因此我们看到，在卷积变换后再实行 Fourier 变换，便得出一个形式非常简单的变换. 例如当 $f\in L^2(E_n)$时，则由 Plancherel定理和当 y 趋向 0 时 $e^{-2\pi y|x|}$ 收敛于 1 这一事实，立即可知

$$\lim_{y\to 0}\|f-(K_y*f)\|_2=0.$$

这是下述一般情况的一个极简单的特例：作卷积算子的 Fourier 变换，我们得到一个乘法算子，它的许多重要性质是很容易导出的. Poisson 核是一个径向函数，我们所要考虑的其它核也将是径向函数或是径向函数与球调和函数的乘积，根据定理 3.10, 我们有理由期望这种核的 Fourier 变换具有相同的形式(既使这个核不是 L^1 或 L^2 函数).

我们讨论的第一个应用涉及如下一类核，它们给出的卷积变

换在 Fourier 变换和偏微分方程理论中是很重要的. 这类核是形如$P(x)/|x|^{\beta}$的函数，其中 P 是 k 阶球体调和函数，β 是复数. 若 K 就是这种形式的函数，且 $\mathrm{Re}(\beta)<n+k$，那么 K 是局部可积的，并且是一个第一章 § 3 例(3) 中所述的缓变广义函数. 于是它的 Fourier 变换 $\hat{K}$ 有意义并且也是缓变广义函数. 下面的定理表明，当β在某个范围中时，K 是缓变函数，并给出了它的显式表示.

定理 4.1 设α是使$0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$的复数，$P(x)$是 E_n 上的 k 阶齐次调和多项式. 若 $K(x)=P(x)/|x|^{n+k-\alpha}$，则 $\hat{K}(t)=\gamma P(t)/|t|^{k+\alpha}$，其中

$$\gamma=\gamma_{k,\alpha}=i^{-k}\pi^{(n/2)-\alpha}\,\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right).$$

证明 我们定义 K_1: 当 $|x|\leqslant 1$ 时 $K_1(x)=K(x)$; 当 $|x|>1$ 时 $K_1(x)=0$; 再定义 K_2 为 $K-K_1$. 这样，K_1 属于 $L^1(E_n)$，且若再加限制 $\mathrm{Re}(\alpha)<n/2$，就有 K_2 属于 $L^2(E_n)$. 于是从广义函数的 Fourier 变换的定义(见第一章(3.15))知道 $\hat{K}=\hat{K}_1+\hat{K}_2$. 我们用 $L^1(E_n)\cap L^2(E_n)$中的函数来逼近 K_1 和 K_2，并利用(2.19)，可看出，$\hat{K}_1$ 和 $\hat{K}_2$ 一定是$\hat{K}_1(x)=f_1(|x|)P(x)$ 和 $\hat{K}_2(x)=f_2(|x|)P(x)$的形式. 因而 $\hat{K}(x)=f(|x|)P(x)$，其中 $f=f_1+f_2$. 假如 K 本身能在 $L^1(E_n)\cap L^2(E_2)$中，那么根据定理 3.10 可立即推得 f 是 $-(k+\alpha)$阶齐次函数. 但遗憾的是情况并非如此，因而我们不能直接应用定理 3.10 来得到这个齐次性. 为了证明当 $\delta>0$ 时，对几乎一切 $r>0$ 有

$$f(\delta r)=\delta^{-k-\alpha}f(r), \tag{4.2}$$

我们虽然可以利用定理 3.10 和逼近的办法，但是利用 Fourier 变换和 E_n 上伸缩变换之间的关系来证明会更容易些.

设φ是一个检验函数($\mathscr{S}$ 的一个元素). 根据乘法公式(实际上，是根据缓变广义函数的 Fourier 变换的定义)，我们有

$$\int_{E_n}K(x)\hat{\varphi}(x)dx=\int_{E_n}\hat{K}(x)\varphi(x)dx.$$

在上式左端，令 $x=\delta u$，在右端令 $x=\delta^{-1}v$，则等式变为

$$\delta^n\int_{E_n}K(\delta u)\hat{\varphi}(\delta u)du=\delta^{-n}\int_{E_n}\hat{K}(\delta^{-1}v)\varphi(\delta^{-1}v)dv.$$

因为 $K(\delta u)=\delta^{\alpha-n}K(u)$，所以有

$$\delta^\alpha\int_{E_n}K(u)\hat{\varphi}(\delta u)\,du=\delta^{-n}\int_{E_n}\hat{K}(\delta^{-1}v)\varphi(\delta^{-1}v)dv.$$

另一方面，其值为 $\varphi(\delta^{-1}v)$ 的函数 ψ 的 Fourier 变换是函数 $\hat{\psi}(u)=\delta^n\hat{\varphi}(\delta u)$，$u\in E_n$. 那么，对一切检验函数 φ，

$$\begin{aligned}\delta^{-\alpha}\int_{E_n}\hat{K}(\delta^{-1}v)\varphi(\delta^{-1}v)\,dv&=\delta^n\int_{E_n}K(u)\hat{\varphi}(\delta u)du\\&=\int_{E_n}K(u)\hat{\psi}(u)du\\&=\int_{E_n}\hat{K}(u)\psi(u)du\\&=\int_{E_n}\hat{K}(v)\varphi(\delta^{-1}v)dv.\end{aligned}$$

因而，对几乎一切 $v\in E_n$，$\hat{K}(v)=\delta^{-\alpha}\hat{K}(\delta^{-1}v)$，(4.2)得证. 于是对一切 $\xi>0$，

$$F(\xi)=\int_0^\xi f(r)\,dr=\int_0^1 f(\xi s)\xi\,ds=F(1)\xi^{1-k-\alpha},$$

并由此有 $f(r)=F'(r)=\gamma r^{-k-\alpha}$. 这就表明如果 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n/2$，则对几乎一切 $t\in E_n$，有 $\hat{K}(t)=\gamma P(t)/|t|^{k+\alpha}$. 为了计算 γ，我们取 $\varphi(x)=e^{-\pi|x|^2}P(x)$. 按照定理 3.4，便知 $\hat{\varphi}(t)=i^{-k}\varphi(t)$. 因此

$$\begin{aligned}&i^{-k}\int_{E_n}e^{-\pi|t|^2}P(t)\{P(t)/|t|^{k+n-\alpha}\}\,dt\\&=\gamma\int_{E_n}e^{-\pi|t|^2}P(t)\{P(t)/|t|^{k+\alpha}\}\,dt.\end{aligned}$$

将等式两端的积分用极坐标表示，再消去相同项 $\int_{\Sigma_{n-1}}[P(t')]^2\,dt'$，我们就得到

$$i^{-k}\int_0^\infty r^{\alpha+k-1}e^{-\pi r^2}\,dr=\gamma\int_0^\infty r^{k+n-\alpha-1}e^{-\pi r^2}\,dr.$$

从这个等式以及关系式

$$\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\pi^{-(\beta+1)/2}=2\int_0^\infty e^{-\pi t^2}t^\beta\,dt$$

便很容易算出 γ 的值.

最后,还得把这个结果扩展到整个 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$ 上去. 我们已经对 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n/2$ 以及 φ 是检验函数时建立了等式:

(4.3)
$$\int_{E_n}\{P(x)/|x|^{k+n-\alpha}\}\hat{\varphi}(x)dx$$
$$=\gamma_{k,\alpha}\int_{E_n}\{P(x)/|x|^{k+\alpha}\}\varphi(x)dx.$$

而上式这两个积分都在 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$ 的范围内各定义了一个 α 的解析函数. 又由于 $\gamma_{k,\alpha}$ 也是这个范围内 α 的解析函数, 所以等式(4.3)对于 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$ 必成立. 于是从广义函数的 Fourier 变换的定义立即可以推得定理成立. 】

形如 $K(x)=P(x)/|x|^{n+k}$, $k\geqslant 1$, 的核给出了分析中的一类重要的算子[10]. 鉴于定理 4.1, 我们自然要考虑当 α 趋于 0 时的极限问题,并试图证实

$$\hat{K}(t)=i^{-k}\pi^{n/2}\left\{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\right\}P(t)/|t|^k.$$

我们遇到的第一个困难是 K 在原点的邻域中不可积. 然而 K 可以用来定义一个缓变广义函数 L: 对每个检验函数 φ, 我们令

(4.4)
$$L(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0<\varepsilon<|t|}K(t)\varphi(t)\,dt.$$

为了说明这个极限存在并定义一个检验函数空间 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函,我们只需对 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|<1}K(t)\varphi(t)\,dt$ 证明这两点即可(因为,函数

$$K_1(t)=\begin{cases}0, & |t|\leqslant 1,\\ K(t), & |t|>1\end{cases}$$

是缓变函数). 由于 $k\geqslant 1$, 故必有

$$\int_{\varepsilon<|t|<1}K(t)\,dt=\int_\varepsilon^1 r^{-1}\left\{\int_{\Sigma_{n-1}}P(t')dt'\right\}dr=0,$$

---

10) 这些算子是奇异积分算子(将在第六章讨论)的特殊情形.

于是 $\int_{\varepsilon<|t|<1} K(t)\varphi(t)\,dt=\int_{\varepsilon<|t|<1} K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]dt.$

而 $$|\varphi(t)-\varphi(0)|\leqslant\{\sup_{|s|\leqslant 1}|(\nabla\varphi)(s)|\}|t|.$$

从而,若 $t=|t|t'$, $$|K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]|\leqslant\{\sup_{s\in E_n}|(\nabla\varphi)(s)|\}|P(t')|/|t|^{n-1},$$

则 $K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]$ 是局部可积的,并且

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|<1} K(t)\varphi(t)dt\right|$$
$$=\left|\int_{|t|<1} K(t)\ [\varphi(t)-\varphi(0)]\ dt\right|$$
$$\leqslant\{\sup_{s\in E_n}|(\nabla\varphi)\ (s)|\}\int_{|t|<1}\{|P(t')|/|t|^{n-1}\}\,dt.$$

则根据第一章定理 3.11 得知 L 是缓变广义函数.

由极限过程(4.4)得到的广义函数叫作主值广义函数. 通常我们把用 K 定义的这样的线性泛函记作

$$L(\varphi)=\mathrm{P.V.}\int_{E_n} K(t)\varphi(t)dt,\ \ \varphi\in\mathscr{S}.$$

这时,我们也仍用 K 表示该广义函数.

如刚才所见, 既然 $K(t)=P(t)/|t|^{n+k}$ 定义了一个(主值)广义函数, 那么其 Fourier 变换 $\hat{K}$ 也定义为缓变广义函数. 下面的定理证实了我们上面提到的当 α 趋向 0 时的极限问题.

定理 4.5 设 $P(x)$ 是 E_n 上的齐次调和多项式,其阶为 $k\geqslant 1$. 若 $K(x)=P(x)/|x|^{n+k}$, 则

$$\hat{K}(t)=\left\{i^{-k}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\right\}P(t)/|t|^{k}$$
$$=\gamma_{k,0}P(t)/|t|^{k}.$$

证明 我们必须对一切检验函数 φ, 证明

(i) $$\gamma_{k,0}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{k}\}\varphi(t)dt$$
$$=\mathrm{P.V.}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k}\}\hat{\varphi}(t)dt.$$

定理 4.1 指出, 当 $0<\alpha<n$ 时,

(ii) $\gamma_{k,\alpha}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{k+\alpha}\}\varphi(t)dt$

$$=\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\}\hat{\varphi}(t)dt.$$

而当 $\alpha\to 0$ 时，(ii)之左端趋向(i)之左端，所以我们只需证明

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\}\hat{\varphi}(t)dt$$

$$=\mathrm{P.V.}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k}\}\hat{\varphi}(t)dt.$$

由于 $P(t)$ 在以原点为心之球面上的积分为 0，并且如前面所看到的，$K(t)[\hat{\varphi}(t)-\hat{\varphi}(0)]$ 局部可积，所以根据控制收敛定理，便得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\}\hat{\varphi}(t)dt$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int_{|t|<1}\{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\}\{\hat{\varphi}(t)-\hat{\varphi}(0)\}dt$$

$$+\int_{|t|>1}K(t)\hat{\varphi}(t)dt$$

$$=\int_{|t|<1}K(t)[\hat{\varphi}(t)-\hat{\varphi}(0)]\,dt+\int_{|t|>1}K(t)\hat{\varphi}(t)\,dt.$$

而前已证明，这正是所要的极限 $\mathrm{P.V.}\int_{E_n}\{P(t)/|t|^{n+k}\}\hat{\varphi}(t)dt$，因而定理得证. 】

若设 $Y^{(k)}(x')=P^{(k)}(x)/|x|^k$，这里 $x\neq 0$，$x'=x/|x|$，$P^{(k)}$ 是 $k(\geqslant 1)$ 阶调和多项式(即 $Y^{(k)}$ 是 k 阶球调和函数)，令

$$\Omega(x')=\sum_{k=1}^{m}Y^{(k)}(x'),$$

那么，从定理 4.5 推知，$K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ 定义了一个主值广义函数，它的 Fourier 变换是

$$\hat{K}(x)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_{k,0}Y^{(k)}(x').$$

鉴于推论 2.3，我们自然更一般地考虑由如下的 Ω 得到的核 K，这些函数 Ω 是在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中由球调和函数 $Y^{(k)}(k=1, 2, 3, \cdots)$

生成的闭子空间内. 确切地说,这个子空间是由 L^2 中满足

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(x')dx'=0 \tag{4.6}$$

的函数组成. 如果我们令 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$, 将(4.4)后的论述稍加推广,就能证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0<\varepsilon<|t|} K(t)\varphi(t)dt$$

定义了一个主值广义函数(这里, φ 是检验函数), 我们仍用 K 表示它. 于是定理 4.5 有下述推广:

定理 4.7 假设 Ω 是 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中满足(4.6)的函数,则存在唯一的一列 k 阶球调和函数 $Y^{(k)}$, 使得

$$\Omega=\sum_{k=1}^{\infty} Y^{(k)}, \tag{4.8}$$

该级数按 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 范数收敛. 在 $x\neq 0$ 处之值为 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ 的函数定义了一个主值广义函数, 其 Fourier 变换是 0 阶齐次函数. 于是当 $x\neq 0$ 时, $\hat{K}(x)=\Omega_0(x')=\Omega_0(x/|x|)$, 且

$$\Omega_0=\sum_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)},\ Y_0^{(k)}=\gamma_{k,0}Y^{(k)},$$

该级数是按 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 范数收敛. 此外,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n\|Y_0^{(k)}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} k^n\int_{\Sigma_{n-1}} |Y_0^{(k)}(x')|^2dx'<\infty. \tag{4.9}$$

反之,任一 0 阶齐次函数 Ω_0, 若它在 Σ_{n-1} 上的限制为平方可积的,且满足 $\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega_0(x')dx'=0$, 而且有一个满足(4.9)的球调和展开, 那么, Ω_0 便是一个形如 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ 的主值广义函数的 Fourier 变换,其中 Ω 属于 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 并满足(4.6).

证明 由推论 2.3 直接推出式(4.8), 而推论 2.3 连同推论 2.4 的正交关系, 便推出

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y^{(k)}\|^2<\infty$$

根据定理 4.5, 我们看到, 当 k 趋向 ∞ 时, $\gamma_{k,0}\approx k^{-n/2}$. 故不等式(4.9)必定成立. 为证明 $\hat{K}$ 是用前面所述之方法由函数 Ω_0 得到的,我们来考察核

$$K^{(m)}(x)=\Omega^{(m)}(x')/|x|^n=\sum_{k=1}^{m}Y^{(k)}(x')/|x|^n.$$

由定理 4.5 可知, $K^{(m)}$(作为主值广义函数)的 Fourier 变换是 0 阶齐次函数, 它在 Σ_{n-1} 上的限制是

$$\sum_{k=1}^{m}Y_0^{(k)}=\sum_{k=1}^{m}\gamma_{k,0}Y^{(k)}.$$

那么,若 φ 是一个检验函数, 则由缓变广义函数的 Fourier 变换的定义得知

$$\int_{E_n}\hat{K}^{(m)}(x)\varphi(x)\,dx=\text{P.V.}\int_{E_n}K^{(m)}\hat{\varphi}(x)dx.$$

由于当 $m\to\infty$ 时, 在 $L^2(\Sigma_{n-1})$中,

$$\sum_{k=1}^{m}Y_0^{(k)}\to\sum_{k=1}^{\infty}Y_0^{(k)}=\Omega_0$$

(这是(4.9)的直接推论), 由此得出

$$\lim_{m\to\infty}\int_{E_n}\hat{K}^{(m)}(x)\varphi(x)\,dx=\int_{E_n}\Omega_0(x/|x|)\varphi(x)\,dx.$$

另一方面,用(4.4)后面的同样论证, 可以证明

(4.10)

$$\begin{aligned}&\text{P.V.}\int_{E_n}K^{(m)}(x)\hat{\varphi}(x)\,dx\\&=\int_{|x|<1}K^{(m)}(x)[\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0)]\,dx+\int_{|x|>1}K^{(m)}(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.\end{aligned}$$

而当 $m\to\infty$ 时, L^2 收敛 $\sum_{k=1}^{m}Y^{(k)}\to\Omega$ 可推出(4.10)的右端收敛于

$$\begin{aligned}&\int_{|x|<1}K(x)[\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(0)]\,dx+\int_{|x|>1}K(x)\hat{\varphi}(x)dx\\&=\text{P.V.}\int_{E_n}K(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.\end{aligned}$$

于是, 对一切检验函数 φ, 有

$$\int_{E_n}\Omega_0(x/|x|)\,\varphi(x)\,dx=\mathrm{P.V.}\int_{E_n}K(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

并且由广义函数 K 之 Fourier 变换的定义得知，$\hat{K}$ 是值为 $\Omega_0(x/|x|)$（当 $x\neq 0$）的函数.

为了证明定理的最后一部份，我们首先注意到，若 Ω_0 有满足(4.9)的球调和展开 $\sum_{k=1}^{\infty}Y_0^{(k)}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}Y^{(k)}$ 在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中收敛于一个在 Σ_{n-1} 上积分为 0 的函数 Ω，其中 $Y^{(k)}=\gamma_{k,0}^{-1}Y_0^{(k)}$. 把本定理的第一部份应用到这个函数 Ω 上，就得到所要求的逆命题. 】

更一般地，对检验函数 φ 以及 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$，我们所给的关于

$$\begin{aligned}\mathrm{P.V.}\int_{E_n}K(x)\varphi(x)dx&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon>0}K(x)\varphi(x)dx\\&=\int_{|x|<1}K(x)[\varphi(x)-\varphi(0)]dx\\&\quad+\int_{|x|>1}K(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

的论证，只依赖于 Ω 在 Σ_{n-1} 上的可积性和性质(4.6). 因而在这种情况下，K 也是一个主值广义函数. 下面的定理给出它的 Fourier 变换 $\hat{K}$ 的一个显式形式:

定理 4.11 设 $\Omega\in L^1(\Sigma_{n-1})$ 满足(4.6)，那么，在 $x\neq 0$ 处之值为 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ 的函数定义了一个主值广义函数，它的 Fourier 变换 $\hat{K}$ 是 0 阶齐次函数. 于是，当 $x\neq 0$ 时，$\hat{K}(x)=\Omega_0(x')=\Omega_0(x/|x|)$. 而且，对 $x'\in\Sigma_{n-1}$，有

$$\Omega_0(x')=-\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left[\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t')+\log|x'\cdot t'|\right]dt',$$

其中 sgn 是 $(-\infty,\infty)$ 上的符号函数:

$$\operatorname{sgn}(s)=\begin{cases}1, & s>0;\\ 0, & s=0;\\ -1, & s<0.\end{cases}$$

证明 设 $L^1(E_n)$ 中的一个函数，当 $0<\varepsilon<|x|<N$ 时，其值为 $\Omega(x')/|x|^n$，当 $|x|$ 在此区间之外时，其值为 0，记其 Fourier 变换为 $\hat{K}_\varepsilon^N$.

若令 $x=rx'$, $t=\rho t'$, x'、t' 在 Σ_{n-1} 上，则有

$$\hat{K}_\varepsilon^N(x)=\int_{\varepsilon<|t|<N} e^{-2\pi i x\cdot t}\frac{\Omega(t')}{|t|^n}dt$$
$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi i r\rho(x'\cdot t')}}{\rho}d\rho\right\}dt'.$$

因为 Ω 满足(4.6)，所以后一积分等于

$$\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{\cos 2\pi r\rho(x'\cdot t')-\cos 2\pi r\rho}{\rho}d\rho\right\}dt'$$
$$-i\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{\sin 2\pi r\rho(x'\cdot t')}{\rho}d\rho\right\}dt'.$$

但如众所周知，

$$\left|\int_\varepsilon^N \frac{\sin 2\pi r\rho(x'\cdot t')}{\rho}d\rho\right|=\left|\int_{2\pi r\varepsilon(x'\cdot t')}^{2\pi rN(x'\cdot t')}\frac{\sin s}{s}ds\right|$$

由不依赖于 ε, N, r 和 $x'\cdot t'$ 的常数控制，并且

$$\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\int_\varepsilon^N \frac{\sin 2\pi r\rho(x'\cdot t')}{\rho}d\rho=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t').$$

此外，

$$\int_\varepsilon^N \frac{\cos 2\pi r\rho(x'\cdot t')-\cos 2\pi r\rho}{\rho}d\rho$$
$$=\int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r|x'\cdot t'|N}\frac{\cos s}{s}ds-\int_{2\pi r\varepsilon}^{2\pi rN}\frac{\cos s}{s}ds$$
$$=\int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds-\int_{2\pi r|x'\cdot t'|N}^{2\pi rN}\frac{\cos s}{s}ds.$$

经简单计算表明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds=\log\frac{1}{|x'\cdot t'|},$$
$$\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi r|x'\cdot t'|N}^{2\pi rN}\frac{\cos s}{s}ds=0.$$

这时，前述等式末端的两个积分的绝对值就由 $\log(1/|x'\cdot t'|)$ 控制.

因此，我们证明了

$$\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi ir\rho(x'\cdot t')}}{\rho}d\rho=-\log|x'\cdot t'|-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t'),$$

且其收敛性是由常数（不依赖于 ε, N, r 和 $x'\cdot t'$）乘 $1+\log(1/|x'\cdot t'|)$ 控制的.

由 Fubini 定理立即可以推出，积分 $\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')|[1+\log(1/|x'\cdot t'|)]dt'$ 对几乎一切 $x'\in\Sigma_{n-1}$ 是有限的，且表示一个 Σ_{n-1} 上的可积函数. 于是，由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\hat{K}_\varepsilon^N(x')=-\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left[\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t')+\log|x'\cdot t'|\right]dt'.$$

另一方面，当 φ 是检验函数时，由乘法公式知，

$$\int_{E_n}\hat{K}_\varepsilon^N(x')\varphi(x)dx=\int_{\varepsilon<|x|<N}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}\hat{\varphi}(x)dx.$$

那么，我们取 $\varepsilon\to0$, $N\to\infty$ 时的极限，并利用主值广义函数 K 的 Fourier 变换的定义，易知定理 4.11 成立. 】

推论 4.12 若 $\Omega\in L^2(\Sigma_{n-1})$，则函数 Ω_0 是连续的.

证明 根据定理 4.7, Ω 有球调和展开式 $\sum_{k=1}^\infty Y^{(k)}$, Ω_0 有展开式 $\sum_{k=1}^\infty Y_0^{(k)}=\sum_{k=1}^\infty\gamma_{k,0}Y^{(k)}$. 令 $\Omega^{(m)}=\sum_{k=1}^m Y^{(k)}$, $\Omega_0^{(m)}=\sum_{k=1}^m Y_0^{(k)}$, 则 $\Omega_0^{(m)}$ 是连续的，并由定理 4.11 知，

$$\begin{aligned}&\Omega_0(x')-\Omega_0^{(m)}(x')\\&=-\int_{\Sigma_{n-1}}[\Omega(t')-\Omega^{(m)}(t')]\left[\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t')+\log|x'\cdot t'|\right]dt'.\end{aligned}$$

于是用 Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}&|\Omega_0(x')-\Omega_0^{(m)}(x')|\\&\leqslant\left(\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')-\Omega^{(m)}(t')|^2dt'\right)^{\frac12}\\&\quad\times\left(\int_{\Sigma_{n-1}}\left(\frac{\pi^2}{4}+|\log|x'\cdot t'||^2\right)dt'\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

但积分 $\int_{\Sigma_{n-1}}\left(\frac{\pi^2}{4}+|\log|x'\cdot t'||^2\right)dt'$

是有限的，且不依赖于 x'，而 $m\to\infty$ 时，有

$$\int_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t') - \Omega^{(m)}(t')|^2 \, dt' \to 0.$$

因而 $\{\Omega_0^{(m)}\}$ 一致收敛于 Ω_0. 又因 $\Omega_0^{(m)}$, $m=1, 2, 3, \cdots$, 是连续的，从而 Ω_0 是连续的. 推论得证. 】

上面给出的主值广义函数 $\Omega(x)/|x|^n$ 是第一章§3所讨论的 (L^2, L^2) 型广义函数的一个例子，我们将在第六章中看到，这些广义函数也是 (L^p, L^p) 型的，$1<p<\infty$.

我们考虑的下一个应用是积分的另一种求和法. 在第一章中（见(1.12)），对于 $\Phi\in C_0$ 且 $\Phi(0)=1$，我们曾经引入了积分 $\int_{E_n} h$ 的 Φ 平均

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = \int_{E_n} \Phi(\varepsilon x) h(x) dx.$$

当 $\Phi(x)=e^{-|x|}$ 时，我们得到 Abel 平均，当 $\Phi(x)=e^{-|x|^2}$ 时，我们得到 Gauss-Weierstrass 平均，而当

$$\Phi_\delta(x) = \Phi(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta, & |x|\leqslant 1; \\ 0 & , |x|>1, \end{cases}$$

$\delta>0$，则得到一个同样重要的求和法：Bochner-Riesz *求和法*. 对此习惯上取 $\varepsilon=1/R$，于是有

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = M_{(1/R),\Phi}(h) = \int_{|x|\leqslant R} \left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)^\delta h(x) dx.$$

若是 f 属于 $L^1(E_n)$，$\varphi=\hat{\Phi}$，且 $h(x)=\hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}$，则（见第一章定理1.16）

$$\begin{aligned} S_R^\delta(t; f) &= S_R^\delta(t) \\ &= \int_{|x|\leqslant R} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot t} \left(1-\frac{|x|^2}{|R|^2}\right)^\delta dx \\ &= \int_{E_n} f(x) R^n \varphi(R(x-t))\, dx \end{aligned}$$

是积分 $\int_{E_n} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot t} dx$（它定义了 f 的 Fourier 逆变换）的 Bochner-Riesz 平均. 如果 φ 属于 $L^1(E_n)$，则由第一章定理1.18,

$\tilde{S}_R^\delta$ 依范数收敛于 f，而若 φ 还满足第一章定理 1.25 的假设，就有

$$\lim_{R\to\infty} S_R^\delta(t) = f(t) \text{ 几乎处处存在.}$$

我们来证明当 $\delta > (n-1)/2$[11] 时，这些结论是成立的.

为此，我们来计算 Fourier 变换 $\varphi = \hat{\Phi}$. 下述含有 Bessel 函数的等式对进行这一计算是有用的.

引理 4.13 若 $\mu > -\frac{1}{2}$，则当 $\nu > -1$, $t>0$ 时，

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu \, ds.$$

证明 如果我们把 e^{its} 展成幂级数 $\sum_{j=0}^\infty (its)^j/j!$，则对实数 $k > -\frac{1}{2}$，根据 § 3 中给出的 $J_k(t)$ 的定义很容易知道

$$\textbf{(4.14)} \qquad J_k(t) = \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{(t/2)^{k+2j}}{j!\,\Gamma(j+k+1)}\text{[12]}.$$

于是，由(4.14)，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu \, ds \\
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{(ts/2)^{\mu+2j}}{j!\,\Gamma(j+\mu+1)} \right\} s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu \, ds \\
&= \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{(t/2)^{\mu+2j}}{j!\,\Gamma(j+\mu+1)} \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\mu+j}(1-r)^\nu \, dr \\
&= \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \frac{(t/2)^{\mu+\nu+1+2j}}{j!\,\Gamma(\mu+\nu+j+2)} \\
&= \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(t).
\end{aligned}$$

引理得证. ▌

定理 4.15 设函数

---

11) 数 $(n-1)/2$ 叫作 Bochner-Riesz 可求和临界指标. 我们在第七章还会遇到它.

12) 推导这一式子时，要考虑到定义 J_k 的积分是等于 $2\int_0^1 (\cos ts)(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds$ 的. 那么幂级数(4.14)的系数就含有表达式 $\int_0^1 s^{2j}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds$，这可以从熟知的关系式 $\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du$ 计算出来.

$$\Phi(t)=\begin{cases}(1-|t|^2)^\delta, & |t|\leqslant 1;\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$$

其中 $\delta>0$, 则

$$\hat{\Phi}(x)=\pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)|x|^{-(n/2)-\delta}J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|).$$

证明 根据定理 3.3, 有

$$\hat{\Phi}(x)=2\pi|x|^{-[(n-2)/2]}\int_0^1(1-|s|^2)^\delta J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s)s^{n/2}\,ds.$$

现取 $\nu=\delta$, $\mu=(n-2)/2$, 应用引理 4.13, 则上式等于

$$2\pi|x|^{-[(n-2)/2]}(2\pi)^{-\delta-1}2^\delta\Gamma(\delta+1)|x|^{-\delta-1}J_{(n-2)/2+\delta+1}(2\pi|x|).$$

由此容易导出所需要的 $\hat{\Phi}(x)$ 的表达式. 】

由 (3.12) 和 (4.14) 推出, 当 $\delta>(n-1)/2$ 时, $\varphi=\hat{\Phi}$ 属于 $L^1(E_n)$. 此外, φ 满足第一章定理 1.18 和定理 1.25 之假设, 因此我们得到:

推论 4.16 若 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$, $S_R^\delta=\varphi_{(1/R)}*f$, 此处 $\varphi_{(1/R)}(x)=R^n\varphi(Rx)$, $R>0$, $\delta>(n-1)/2$, 则

(a) 当 $R\to\infty$ 时, $\|S_R^\delta-f\|_p\to 0$;

(b) 对 f 的 Lebesgue 点集上的所有 x, 有

$$\lim_{R\to\infty}S_R^\delta(x)=f(x)$$

(特别地, 对几乎一切 $x\in E_n$, 这个等式成立).

§5 进一步的结果

5.1 我们不难把定理 1.1 推广成为描述 Fourier 变换与 E_n 到自身的任意一个非奇异线性变换间的关系上去. 设 σ 就是这样一个变换, 并定义 $\tilde{\sigma}$ 是 σ 的伴随逆变换的逆变换(等价地, $\tilde{\sigma}$ 是 σ 的逆变换的伴随变换). $\tilde{\sigma}$ 称为 σ 的逆步(变换). 如果我们定义 σ 在函数 f 上的作用为变换 R_σ: $(R_\sigma f)(x)=f(\sigma x)$, 就有以下结果: 若 $f\in L^1(E_n)$, 则 $(R_\sigma f)^\wedge=|\det\sigma|^{-1}R_{\tilde{\sigma}}\hat{f}$. 也就是说, $\mathscr{F}R_\sigma=|\det\sigma|^{-1}R_{\tilde{\sigma}}\mathscr{F}$. 要证明它并不比证明定理 1.1 困难. 由于变量

代换 $s=\sigma t$ 的 Jacobi 行列式是 $|\det\sigma|^{-1}$，所以我们有

$$
\begin{aligned}
(R_\sigma f)^\wedge(t) &= \int_{E_n} e^{-2\pi i t\cdot x} f(\sigma x)\,dx \\
&= |\det\sigma|^{-1}\int_{E_n} e^{-2\pi i(t\cdot\sigma^{-1}s)} f(s)ds \\
&= |\det\sigma|^{-1}\int_{E_n} e^{-2\pi i(\tilde{\sigma}t\cdot s)} f(s)ds \\
&= |\det\sigma|^{-1}(R_{\tilde{\sigma}}\hat{f})(t).
\end{aligned}
$$

5.2 下列结果(R. Coifman 写信提供给我们的)进一步表明，正交变换和 Fourier 变换有着紧密的联系：设 σ 是 E_n 到自身的连续一一变换，使得 R_σ 与 Fourier 变换可交换，那么，σ 是一个正交变换．为证明这一点，我们首先看到，在假设条件下，

$$(R_\sigma\mathscr{F}f)(0)=(\mathscr{F}R_\sigma f)(0)$$

对一切 $f\in L^1(E_n)$ 成立．把这个等式应用到 x 的函数 $f(x)=g(x)e^{-2\pi i\sigma^{-1}(x)\cdot y}$ $(x\in E_n)$ 上，这里 $y\in E_n$ 是固定的，我们就得到，

$$0=\int_{E_n}\left[e^{-2\pi i x\cdot\sigma(0)}e^{-2\pi i\sigma^{-1}(x)\cdot y}g(x)-e^{-2\pi i x\cdot y}g(\sigma x)\right]dx.$$

而再根据假定，有

$$\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot y}g(\sigma x)\,dx=\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot\sigma y}g(x)\,dx.$$

于是对一切 $L^1(E_n)$ 中之 g，有

$$0=\int_{E_n}\left[e^{-2\pi i(x\cdot h+\sigma^{-1}(x)\cdot y)}-e^{-2\pi i x\cdot\sigma(y)}\right]g(x)\,dx,$$

其中 $h=\sigma(0)$．因而对一切 $x, y\in E_n$，$e^{-2\pi i(x\cdot h+\sigma^{-1}(x)\cdot y)}=e^{-2\pi i x\cdot\sigma(y)}$．于是对某个整数 k，有 $x\cdot h+\sigma^{-1}(x)\cdot y=x\cdot\sigma(y)+k$．但由 σ 的连续性得出 k 是常数．令 $x=0$，则对一切 $y\in E_n$ 就有 $\sigma^{-1}(0)\cdot y=k$，由此推出 $k=0$．因而，由 $\sigma^{-1}(0)=0$ 知，$h=\sigma(0)=0$．这就证明了对一切 $y\in E_n$，有 $\sigma^{-1}(x)\cdot y=x\cdot\sigma(y)$，或者等价地有 $x\cdot y=\sigma(x)\cdot\sigma(y)$．因此，$\sigma$ 是把 0 映射为 0 的等距映射．由此易知，σ 是正交变换．

5.3 设 $\beta(x, y)$，$x, y\in E_n$，是一个非退化实对称二次型(不一定是正定的)．那么，当 $x\in E_n$ 固定时，映射 $t\to\hat{x}(t)=e^{2\pi i\beta(x,t)}$ 是

一个特征(即指由 E_n 到绝对值是 1 的复数集的连续映射，使对 $s, t\in E_n$，有 $\hat{x}(s+t)=\hat{x}(s)\hat{x}(t)$). 我们定义特征的乘法为: $\hat{x}_1\hat{x}_2(t)=\hat{x}_1(t)\hat{x}_2(t)$. 那么，一切特征的集合是一个群——$E_n$ 的特征群. 映射 $x\to\hat{x}$ 是 E_n 到它的特征群的一个同构. 不难证明这个映射是映上的. 于是我们可以把 E_n 与它的特征群同等看待. 这种"等同化"当然是依赖于双线性型 β 的.

我们显然可以把特征和特征群的定义推广到任意局部紧 Abel 群 G 上. 但是一般说来，G 和它的特征群 $\hat{G}$ 不一定是同构的. 在抽象调和分析中，$L^1(G)$中函数 f 的 Fourier 变换定义为 $\hat{G}$ 上的一个函数，它在 $\hat{x}$ 处的值是

$$\hat{f}(\hat{x})=\int_G f(t)\overline{\hat{x}(t)}\,d\mu(t),$$

其中 μ 是 Haar 测度. 利用 E_n 和 $\hat{E}_n$ 的上述等同性，对每个非退化实对称二次型 β，我们得到一个"Fourier 变换"$T=T_\beta$:

$$(Tf)(x)=\int_{E_n}\overline{\hat{x}(t)}\,f(t)dt=\int_{E_n}e^{-2\pi i\beta(x,t)}f(t)dt.$$

当 $\beta(x, t)=x\cdot t$ 时，就是我们一直在研究的 Fourier 变换. 本章中利用了 Fourier 变换和正交群之间的紧密联系. 一般说来，T_β同与 β 相关联的正交群有相似的联系. E_n 的所有线性变换 σ 所成之群 $O_\beta(n)$ 保持二次型 β 不变(即对所有 $x, y\in E_n$, $\beta(\sigma x, \sigma y)=\beta(x, y)$). 如果 $\sigma\in O_\beta(n)$, R_σ 是由 σ 给出的、作用在以 E_n 为定义域的函数上的变换(见 5.1)，则与定理 1.1 的证明同理，可证 $R_\sigma T_\beta=T_\beta R_\sigma$. 而且，5.2 的结果也能推广于这一情形: 当 σ 是 E_n 到自身的连续一一变换，使得 R_σ 与 T_β 可交换时，则有 $\sigma\in O_\beta(n)$.

5.4 我们已经强调过伸缩变换群的意义. 在考虑 Mellin 变换时，伸缩变换的作用就更加显著，而通过 Mellin 变换，可以重新解释本章的一些结果.

设 f 是区间$(0, \infty)$上的一个复值函数，满足可积性条件:

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{x}\,dx<\infty.$$

那么它的 Mellin 变换 $\mathscr{M}_f(s)=\mathscr{M}(s)$定义为

$$\mathscr{M}(s)=\int_0^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x},\ \text{对}\ \mathrm{Re}(s)=0.$$

如果f_1, f_2都满足可积性条件，则如下定义的乘性卷积

$$(f_1\cdot f_2)(x)=\int_0^\infty f_1(x/y)f_2(y)\frac{dy}{y}$$

也满足可积性条件，我们有 $\mathscr{M}_{f_1\cdot f_2}(s)=\mathscr{M}_{f_1}(s)\mathscr{M}_{f_2}(s_2)$. Mellin 变换十分类似于 Fourier 变换，它的许多基本性质都可以从 E_1 上的 Fourier 变换通过变量代换 $x\to e^x$ 把 E_1 变为$(0,\ \infty)$而得到. 在这方面，我们引述以下等式是有益的. 若$f(x)=x^{a-\mu}J_\mu(x)$, $a>0$, $\mu>a-\dfrac{1}{2}$，则

(a) $\quad \mathscr{M}_f(s)=2^{a+s-\mu-1}\Gamma\left(\dfrac{a+s}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\mu-\dfrac{a+s}{2}+1\right).$

当μ是整数或半整数时，这是与定理 4.1 基本等价的(假定我们已经有了定理 3.10).

(b) 令 $f_1(x)=x^{-\mu+1}J_\mu(x)$,

$$f_2(x)=\begin{cases}x^{-2\mu-2\nu+1}(x^2-1)^\nu/2^\nu\Gamma(\nu+1), & x\geqslant 1,\\ 0, & 0<x<1,\end{cases}$$

则只要 $\nu>-1$, $\mu>-\dfrac{1}{2}$，就有 $f(x)=(f_1\cdot f_2)(x)=x^{-\mu-\nu}J_{\mu+\nu}(x)$. 这个等式与引理 4.13 等价. 该引理的另一证明可在证明 $\mathscr{M}_f(s)=\mathscr{M}_{f_1}(s)\mathscr{M}_{f_2}(s)$后得到.

(a) 的证明和关于 Mellin 变换的进一步结果，可参看 Titchmarsh [2].

5.5 我们曾在第二章中证明调和函数有各阶连续导数（见第二章定理 1.7). 从定理 2.10 和调和函数的 Poisson 积分表示(见定理 1.10 和推论 1.11)立刻可推出调和函数是实解析的.

5.6 引理 2.11 与下述事实等价：只有与旋转可交换的常系数微分多项式才是 Laplace 算子的多项式. 更明确地说，当 $n>1$ 时，引理 2.11 等价于下面的命题：

若 $D=(\partial/\partial x_1,\ \cdots,\ \partial/\partial x_n)$, $P(D)$是 E_n 上常系数微分多项

式，那么，对一切旋转变换 σ，有 $P(D)R_\sigma = R_\sigma P(D)$，当且仅当 $P(D)=c_0 I + c_1\Delta + \cdots + c_m\Delta^m$，此处 $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$ 是 Laplace 算子.

5.7 我们利用生成函数 $(1-2rt+r^2)^{-\lambda}$ 来定义超球多项式 P_k^λ. 当 $\lambda=0$ 时，我们考虑 Tchebichef 多项式更为恰当，它的生成函数是

$$\log(1-2rt+r^2) = -2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}T_k(t)r^k.$$

这样，就可以不必象 §2 中常做的那样排除二维情形. 例如，我们若利用 Tchebichef 多项式，则定理 2.14 就对 $n=2$ 也是成立的.

5.8 在研究 E_n 的旋转群 $SO(n)$ 的酉表示时，显示出 $SO(n)$ 与球调和函数有重要的联系. 现设 $R_{\sigma^{-1}}$ 是 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 上的一个算子：$(R_{\sigma^{-1}}f)(x)=f(\sigma^{-1}x)$，则映射 $\sigma \to R_{\sigma^{-1}}$ 是 $SO(n)$ 的一个酉表示. 若把 $R_{\sigma^{-1}}$ 限制在子空间 $\mathscr{H}_k(k=0, 1, 2, \cdots)$ 上，我们就得到 $SO(n)$ 的一个不可约表示. 在维数 $n=3$ 时，用这种办法可以得到 $SO(n)$ 的所有不可约表示. $SO(n-1)$ 可以很自然地视为等同于 $SO(n)$ 的一个子群 $G(n, x')$，这里，$G(n, x')$ 是由使定点 $x'\in\Sigma_{n-1}$ 保持不动的那些旋转变换 σ 组成. 根据引理 2.8 知道，在每个空间 $\mathscr{H}_k$ 中，有一个非零向量(即 $Z_{x'}$)对一切算子 R_σ 保持不变，此处，σ 是子群 $G(n, x')(\sim SO(n-1))$ 的元素. 由于在 $SO(n-1)$ 的作用下有这种不变向量存在，那么就可以在 $SO(n)$ 的一切不可约表示中，在酉等价的意义下，表征出我们上面所说的不可约表示(见 Weyl[1] 和 Boerner[1]).

5.9 把推论 4.12 推广到 $\Omega\in L^p(\Sigma_{n-1})$, $p>1$ 的情形，其证明没有本质的不同：用 Hölder 不等式代替 Schwarz 不等式，在用球调和函数逼近函数时，不按 L^2 范数而改按 L^p 范数. 我们还可以更加精细地证明，当 $|\Omega|\log^+|\Omega|$ 可积时，该结论也是成立的(此处，当 $x\geqslant 1$ 时，$\log^+ x=\log x$；当 $0<x<1$ 时，$\log^+ x=0$).

5.10 显然可以对 $L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$，定义与子空间 $\mathfrak{H}_k$ 类似的空间. 我们注意到，当 $f_0(|x|)P(x)$ 属于 $L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，

则它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 由公式(3.10)给出，式中的收敛性是按 L^p 范数的(见本书第五章(1.2))。于是引理 3.11 中对 Bessel 函数的估计就有以下结果：(a) 若 $1\leqslant p<2n/(n+1)$，则 $\hat{f}(x)$ 等价于一个当 $x\neq 0$ 时连续的函数；(b) 当 $k<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)n-\frac{1}{2}$ 时，$\hat{f}$ 在原点以外是 $C^{(k)}$ 类中的函数；(c) 当 $p=1$ 时，条件可以改为 $k\leqslant(n-1)/2$(这种类型的结果是 N. Varapolous 写信提供给我们的)。这些事实都可由引理 3.11，Hölder 不等式以及关系式 $(t^{-k}J_k(t))'=-t^{-k}J_{k+1}(t)$ (见(3.2))推出.

文献注释

我们对 Bessel 函数只介绍了在研究 Fourier 变换时所需要的性质. 关于 Bessel 函数完整的叙述可参看 Watson[1] 或 Bateman Manuscript Project [1] Vol. 2. 为进一步详细弄清球调和函数、Gegenbauer 和 Tchebichef 多项式，我们也建议读者参考 Bateman Manuscript Project[1] Vol. 2. 关于 $\mathfrak{H}_k$ 空间上Fourier 变换的早期研究可参看 Hecke [1]，Bochner [6] 和 Herz [1]. 定理 4.1 的另一证明可参阅 Calderón [3]. Mihlin [1]，Calderón 和 Zygmund[5]最先彻底研究了核 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ 的 Fourier 变换. 旋转变换群的性质可以用来进一步得出与本章有关的各种结果，可参阅 Vilenkin[1]，Coifman 和 G. Weiss[1].

第五章 算子插值

设 T 是把某线性空间 $\mathscr{A}$ 映入另一线性空间 $\mathscr{B}$ 的线性算子. 设 A_0, A_1 是 $\mathscr{A}$ 的 Banach 子空间, B_0, B_1 是 $\mathscr{B}$ 的 Banach 子空间, 当 T 限制在 A_i 上时, 它将 A_i 连续地映入 B_i, $i=0, 1$. 这时, 我们常能证明, 存在无穷多个"中间"Banach 空间的序偶 (A, B), $A\subset\mathscr{A}$, $B\subset\mathscr{B}$, 使限制在 A 上的 T 是将 A 映入 B 的有界算子. 我们称这种类型的定理为线性算子的插值定理, 它们在 Fourier 分析中有许多重要的应用. 我们已经遇到过一个例子: $\mathscr{A}=\mathscr{B}$ 是缓变广义函数空间, T 是 Fourier 变换, $A_0=L^1(E_n)$, $B_0=L^\infty(E_n)$, $A_1=L^2(E_n)=B_1$, 那么, 若 T 限制在 $L^p(E_n)$上, $1\leqslant p\leqslant 2$, 则 T 把 $L^p(E_n)$有界地映入 $L^q(E_n)$, 这里$(1/p)+(1/q)=1$. 这是从关于 L^p 空间的基本插值定理——M. Riesz 插值定理——得到的. 我们将在本章第 1 节中研究这一定理以及它的某些应用. 还有另一种类型的插值定理, 在这种定理中, 我们无需做如同在"端点"(A_0, B_0) 和 (A_1, B_1)处有界那样强的假定; 而且还可把 T 的线性条件改成某些更弱的条件. 这种所谓的 Marcinkiewicz 定理用于极大函数算子 $f\to m_f$, 正是我们在第二章曾讨论过的课题. 本章第 2 节将用来讨论 Marcinkiewicz 定理的应用. 当我们把此 Marcinkiewicz 定理推广于包含各 L^p 类在内的函数空间族时, 这一定理是最易明白的. 我们将在第 3 节研究这个函数空间族 $L(p, q)$空间以及推广形式的 Marcinkiewicz 定理. 在第 4 节我们要讨论 M. Riesz 定理的一个推广, 在那里, 算子随着"中间"Banach 空间序偶而充分光滑地变化.

§1 M. Riesz 凸性定理和 L^p 空间上算子的插值

我们在前几章曾遇到过一些作用在 L^p 空间上的算子, 其中一

类是由 $L^p(E_n)$ 函数给出的卷积算子，即固定 $f\in L^p(E_n)$ 而得的把 $g\in L^1(E_n)$ 映成 $f*g$ 的算子 T. 从第一章定理 1.3 知道，T 是定义在 $L^1(E_n)$ 上而在 $L^p(E_n)$ 中取值的有界算子，且算子的范数 $\|T\|$[1] 不超过 $\|f\|_p$. 另一方面，我们应用 Hölder 不等式，立刻可知 T 也把 $L^{p'}(E_n)$ 有界地映入 $L^\infty(E_n)$，其中 $(1/p)+(1/p')=1$；同样，算子范数 $\|T\|$ 也不超过 $\|f\|_p$. 由于 T 是定义在 $L^1(E_n)$ 和 $L^{p'}(E_n)$ 上的，所以对于 $1\leqslant r\leqslant p'$，存在着 T 在空间 $L^r(E_n)$ 的一个自然的扩张：若 $g\in L^r(E_n)$，则我们可以找到 $g_1\in L^1(E_n)$，$g_2\in L^{p'}(E_n)$，使 $g=g_1+g_2$. 定义 T_g 为 $T_{g_1}+T_{g_2}$（显然 T_g 不依赖于 g 的特定分解 $g=g_1+g_2$[2]）. 那么，我们自然会问，T 是否把 $L^r(E_n)$ 有界地映入某空间 $L^q(E_n)$. 我们曾经不加证明地叙述过（见第一章(4.3)），当 $(1/q)=(1/p)+(1/r)-1$ 时情况就是这样，且 $\|T\|$ 也不超过 $\|f\|_p$. 也就是说，当 $f\in L^p(E_n)$ 和 $g\in L^r(E_n)$ 时，

$$\|f*g\|_q\leqslant\|f\|_p\|g\|_r. \tag{1.1}$$

在本节中我们将指出，这个不等式（称为 Young 不等式）易从作用在 L^p 空间上的线性算子的一个一般定理推得.

这个一般定理还可以应用于 Fourier 变换 $\mathscr{F}$. 我们曾把 $\mathscr{F}$ 当作 $L^1(E_n)$ 和 $L^2(E_n)$ 上的线性算子来处理. 第一章定理 1.1 之(a)说明，$\mathscr{F}$ 把空间 $L^1(E_n)$ 有界地映入 $L^\infty(E_n)$，且算子范数 $\leqslant 1$，而 Plancherel 定理告诉我们，$\mathscr{F}$ 把 $L^2(E_n)$ 映成它自身，且算子范数等于 1. 与前段的理由相同，$\mathscr{F}$ 有到“中间”空间 $L^p(E_n)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ 的一个自然扩张（也可参看第一章§2 末之说明）. 我们将证明，这个空间被 $\mathscr{F}$ 有界地映入 $L^{p'}(E_n)$，其中 $(1/p)+(1/p')=1$，且算子范数 $\leqslant 1$. 也就是说，若 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p\leqslant 2$，则 $\hat{f}=\mathscr{F}f$ 属于 $L^{p'}(E_n)$，且

$$\|\hat{f}\|_{p'}\leqslant\|f\|_p. \tag{1.2}$$

---

1) 若 T 是 L^r 到 L^s 的有界变换，则我们用 $\|T\|$ 表示它的范数. 即 $\|T\|=\inf\{k\geqslant 0: \|Tf\|_s\leqslant k\|f\|_r$, 对一切 $f\in L^r\}$.

2) 例如，当 $|g(x)|\geqslant 1$ 时，令 $g_1(x)=g(x)$；当 $|g(x)|<1$ 时，令 $g_1(x)=0$，我们就得到这样一种分解.

这一结果就是著名的 Hausdorff-Young 不等式.

为了叙述前面提到过的关于线性算子的一般定理——M. Riesz 凸性定理，需要引入一些新的概念和记号. 设$(M, \mathscr{M}, \mu)$是一个测度空间[3)]，$L^p(M)$ $(1\leqslant p<\infty)$表示满足$\|f\|_p=\left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p}<\infty$的一切复值函数$f$的空间. 如同$M=E_n$时一样（见第一章开头部分），我们把几乎处处相等的两个函数看作是等价的，并用同样的记号$L^p(M)$表示这样得到的等价类空间. 把包含函数f的等价类的范数定义作$\|f\|_p$，这样就得到了一个 Banach 空间. 对$f\in L^\infty(M)$，我们令$\|f\|_\infty$是f的本性上确界，那么我们对本性有界可测函数空间$L^\infty(M)$也做同样的处理.

若f是一个可测函数，f的截函数是指这样的函数g:

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & r_1<|f(x)|\leqslant r_2; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中r_1, r_2是非负数. 设T是一个算子，它把$(M, \mathscr{M}, \mu)$上的可测函数的线性空间D映到另一个测度空间$(N, \mathscr{N}, \nu)$上的可测函数空间中. 我们设D包含一切有限测度集的特征函数，并设当$f\in D$时，它的截函数$g\in D$. 如果存在一个常数$K>0$，使得对一切$f\in D\cap L^p(M)$，有

$$\left(\int_N |Tf|^q d\nu\right)^{1/q}=\|Tf\|_q\leqslant k\|f\|_p=k\left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

我们就说算子T是(p, q)型的. 使这不等式成立的最小的k，叫作T的(p, q)范数.

现在，M. Riesz 凸性定理就可如下给出：

定理 1.3 设线性算子T是(p_i, q_i)型的，其(p_i, q_i)范数为k_i; $i=0, 1$. 如果$1/p_t=(1-t)/p_0+t/p_1$, $1/q_t=(1-t)/q_0+t/q_1$, $0\leqslant t\leqslant 1$[4)]，则T是(p_t, q_t)型的，其(p_t, q_t)范数$k_t\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$.

---

3) M是一个集合，$\mathscr{M}$是M的可测子集的σ代数，μ是定义在$\mathscr{M}$上的测度. 我们仅考虑σ有限测度空间，那么，测度论的一切标准结果，诸如 Radon–Nikodym 定理和 F. Riesz 表示定理等，都是成立的.

4) 当p_0, p_1, q_0或q_1是∞时，我们采用通常的约定：令$1/\infty=0$.

在证明定理以前，我们先来说明如何从它推出不等式(1.1)和(1.2)．我们曾看到，算子 $T: g\to f*g$ 是 $(p_0, q_0)=(1,p)$ 和 $(p_1, q_1)=(p', \infty)$ 型的（它的定义域 D 包括所有的空间 $L^r(E_n)$, $1\leqslant r\leqslant p'$）；而且，其 $(1, p)$ 范数和 (p', ∞) 范数不超过 $\|f\|_p$. 于是 T 是 (p_t, q_t) 型的，$0\leqslant t\leqslant 1$，此处

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}=1-t+\frac{t}{p'}=1-\frac{t}{p},$$

$$\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}=\frac{1-t}{p}+\frac{t}{\infty}=\frac{1-t}{p}.$$

置 $r=p_t$, $q=q_t$，我们就有

$$\frac{1}{q}=\frac{1-t}{p}=\frac{1}{p}+\left(1-\frac{t}{p}\right)-1=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1.$$

此外，T 的 (r, q) 范数不超过 $\|f\|_p^{1-t}\|f\|_p^t=\|f\|_p$，而这正是不等式(1.1)．类似地，由于 Fourier 变换是 $(1, \infty)$ 型和 $(2, 2)$ 型的，其范数都不超过 1，对 $t=2/p'$ 应用定理 1.3，就得到 Hausdorff-Young 不等式(1.2)．

考察 M. Riesz 凸性定理的几何意义常常是有用的．设 Q 是平面上的正方形，其顶点为 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 和 $(0,1)$．若 T 是满足定理 1.3 假设条件的算子，为了说明 T 是 (p_0, q_0) 型和 (p_1, q_1) 型的，我们可以把 T 与点 $x_0=(1/p_0, 1/q_0)$, $x_1=(1/p_1, 1/q_1)$ 联系起来．当 t 值从 0 取到 1 时，则点 $x_t=(1/p_t, 1/q_t)$ 就跑遍连结 x_0 和 x_1 的线段．定理 1.3 是说，对这个线段上的每一点 (α, β)，T 是 $(1/\alpha, 1/\beta)$ 型的．

我们之所以把定理 1.3 叫作凸性定理，是因为如果 $\varphi(t)$ 是 T 的 (p_t, q_t) 范数的对数，那么 φ 是凸函数．而且，能使 T 成为 (p, q) 型的点 $(1/p, 1/q)$ 的集合是一个凸集．我们来证明，用函数论的一个古典结果——它也涉及到对数凸函数——可以导出定理1.3 这个结果，即 Phragmen-Lindelöf 定理（见第二章(5.2)），就是著名的三线定理．它可如下叙述：

引理 1.4 假设 F 是闭带域 $S=\{x+iy=z\in \boldsymbol{C};\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上的有界连续复值函数，它在 S 内是解析的．如果对一切 y，有

$|F(iy)|\leqslant m_0$, $|F(1+iy)|\leqslant m_1$, 则对一切 $z=x+iy\in S$, 就有 $|F(x+iy)|\leqslant m_0^{1-x}m_1^x$. 就是说,我们若定义 $k_x=\sup\{|F(x+iy)|: -\infty<y<\infty\}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 则 $\varphi(x)=\log k_x$ 是一个凸函数. ∎

证明　显然我们可以假定 m_0 和 m_1 都是正的. 然后, 借助于考虑函数 $F(z)/m_0^{1-z}m_1^z$, 我们可以把问题化为 $m_0=1=m_1$ 的情形. 于是我们可以假定对所有的 y, 有 $|F(iy)|\leqslant 1$ 和 $|F(1+iy)|\leqslant 1$. 我们要证明, 对一切 $z\in S$, 有 $|F(z)|\leqslant 1$. 如果能有 $\lim\limits_{|y|\to\infty}F(x+iy)=0$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致成立, 则由极大值原理就易证明所要的结果, 因为这样我们就能找到 $y_0>0$, 使对一切 $|y|\geqslant y_0$, 有 $|F(x+iy)|\leqslant 1$, 而在以 iy_0, $1+iy_0$. $1-iy_0$, $-iy_0$ 为顶点的矩形边界上, 有 $|F(z)|\leqslant 1$. 一般说来, 我们考虑函数 $F_n(z)=F(z)e^{(z^2-1)/n}$, $n=1, 2, \cdots$. 由于 F 是有界的, 所以当 $y\to\infty$ 时, $|F_n(z)|=|F(x+iy)|e^{-y^2/n}e^{(x^2-1)/n}\leqslant|F(x+iy)|e^{-y^2/n}\to 0$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致成立. 又 $|F_n(iy)|\leqslant 1$, $|F_n(1+iy)|\leqslant 1$. 因而 $|F_n(z)|\leqslant 1$. 令 $n\to\infty$ 就得到我们要证的不等式. 】

现在我们来证明定理 1.3. 为此, 设 $\alpha_j=1/p_j$, $\beta_j=1/q_j$, $j=0, 1$, $\alpha=1/p_t$, $\beta=1/q_t$. 这样, 对于 $z\in\boldsymbol{C}$, 若令 $\alpha(z)=(1-z)\alpha_0+z\alpha_1$, $\beta(z)=(1-z)\beta_0+z\beta_1$, 我们就有 $\alpha(j)=\alpha_j$, $\beta(j)=\beta_j$, $j=0, 1$, $\alpha(t)=\alpha$, $\beta(t)=\beta$.

首先我们估计 $\|Tf\|_q$, 这里 f 是 M 的有限测度子集的特征函数的有限线性组合. 依定义, 这个简单函数 f 是在 T 的定义域中. 因为

$$\|Tf\|_q=\sup\left|\int_N(Tf)g\,d\nu\right|,$$

这里, 上确界是对一切满足 $\|g\|_{q'}=1$, $(1/q)+(1/q')=1$ 的简单函数 g 取的, 于是我们只需证明每个这种积分

$$I=\int_N(Tf)g\,d\nu$$

的绝对值不超过 $k_0^{1-t}k_1^t\|f\|_p$. 如果 $\|f\|_p$ 不为 0, 则上述结果除以 $\|f\|_p$, 我们又可把问题归结为 $\|f\|_p=1$ 的情形.

于是，我们设 $f=\sum_{j=1}^{m}a_j\chi_{E_j}$ 和 $g=\sum_{k=1}^{n}b_k\chi_{F_k}$ 是满足上述条件的简单函数. 我们还设 $p_t<\infty, q_t>1$, 则 $\alpha>0, \beta<1$. 若 $a_j=|a_j|e^{i\theta_j}$, $b_k=|b_k|e^{i\varphi_k}$, 对 $z\in \boldsymbol{C}$, 定义

$$f_z=\sum_{j=1}^{m}|a_j|^{\alpha(z)/\alpha}e^{i\theta_j}\chi_{E_j},$$

$$g_z=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}e^{i\varphi_k}\chi_{F_k}.$$

令 $F(z)=\int_N(Tf_z)g_z d\nu$, 则得到一个整函数，依 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 的定义就推出 $F(t)=I$. 根据 T 的线性性质，我们看出

$$F(z)=\sum_{j,k}^{m,n}|a_j|^{\alpha(z)/\alpha}|b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}\gamma_{jk},$$

其中 $\gamma_{jk}=e^{i(\theta_j+\varphi_k)}\int_N(T\chi_{E_j})\chi_{F_k}d\nu$. 由于式中每个被加项在带域 S 中有界，因而若整函数 F 限制在该带域上，则 F 也有界. 如果我们能证明，对一切 y 有 $|F(iy)|\leqslant k_0$, $|F(1+iy)|\leqslant k_1$, 则可从引理 1.4 立即得到所要的不等式 $|I|\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$.

我们可以这样来得到这两个估计式: 由于

$$\alpha(iy)=\alpha_0+iy(\alpha_1-\alpha_0),$$
$$1-\beta(iy)=(1-\beta_0)-iy(\beta_1-\beta_0),$$

故有 $$|f_{iy}|^{p_0}=|e^{i\arg f}|f|^{iy(\alpha_1-\alpha_0)/\alpha}|f|^{(p/p_0)}|^{p_0}=|f|^p$$

和 $$|g_{iy}|^{q_0'}=|e^{i\arg g}|g|^{-iy(\beta_1-\beta_0)/(1-\beta)}|g|^{(q'/q_0')}|^{q_0'}=|g|^{q'}.$$

于是，利用 Hölder 不等式和 T 是 (p_0, q_0) 型并具范数 k_0, 得到

$$\begin{aligned}|F_{iy}|&\leqslant\|Tf_{iy}\|_{q_0}\|g_{iy}\|_{q_0'}\leqslant k_0\|f_{iy}\|_{p_0}\|g_{iy}\|_{q_0'}\\&=k_0\left(\int_M|f|^p d\mu\right)^{1/p_0}\left(\int_N|g|^{q'}d\nu\right)^{1/q_0'}\\&=k_0\|f\|_p^{(p/p_0)}\|g\|_{q'}^{(q'/q_0')}=k_0.\end{aligned}$$

进行类似的计算也可得到 $|F(1+iy)|\leqslant k_1$. 因而我们可以断言，对一切简单函数 $f\in L^p(M)$, $\|Tf\|_q\leqslant k_0^{1-t}k_1^t\|f\|_p$.

为了一般地对 $f\in D\cap L^p(M)$ 建立这一不等式（其中 D 是 T 的定义域），我们来证明，可以找到一个简单函数列 $\{f_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，有 $\|f_n-f\|_p\to 0$，且对几乎一切 x，有 $(Tf_n)(x)\to(Tf)(x)$. 若果真如此，利用 Fatou 引理和我们刚刚得到的关于简单函数的结果，就得出不等式

$$\|Tf\|_q\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|Tf_n\|_q\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\{k_0^{1-t}k_1^t\|f_n\|_p\}=k_0^{1-t}k_1^t\|f\|_p,$$

于是定理就能得证. 为了找出这种序列，我们假定 $f\geqslant 0$（因为我们可以分别考虑 $\mathrm{Re}\{f\}$ 和 $\mathscr{I}\{f\}$ 的正部和负部）. 我们还可认为 $p_0\leqslant p_1$（否则可重新编号）. 令 f^0 和 f^1 是 f 的截函数，其定义如下：

$$f^0(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)>1;\\ 0, & \text{当 } f(x)\leqslant 1,\end{cases}$$

$f^1=f-f^0$. 因 $(f^0)^{p_0}\leqslant f^p$, $(f^1)^{p_1}\leqslant f^p$，且 D 包含 f 的所有截函数，所以有 $f^0\in D\cap L^{p_0}(M)$, $f^1\in D\cap L^{p_1}(M)$. 若 $\{g_m\}$ 是收敛于 f 的非负简单函数的递增序列，则依 Lebesgue 单调收敛定理，

$$\lim_{m\to\infty}\|g_m-f\|_p=0.$$

同理，当 $m\to\infty$ 时，$\|g_m^0-f^0\|_{p_0}$ 和 $\|g_m^1-f^1\|_{p_1}$ 趋于 0. 这里，如同从 f 得出截函数 f^0, f^1 一样，g_m^0 和 g_m^1 是从 g_m 得出的截函数（在 1 处截断）. 又因 T 是 $(p_0,\ q_0)$ 和 $(p_1,\ q_1)$ 型的，当 $m\to\infty$ 时，必有 $\|Tg_m^0-Tf^0\|_{q_0}\to 0$, $\|Tg_m^1-Tf^1\|_{q_1}\to 0$. 于是存在 $\{Tg_m^0\}$ 的一个子列，几乎处处收敛于 Tf^0. 再在这个子列中考虑，我们又可以选出一个子列 $\{g_{m_n}^1\}$，使 $Tg_{m_n}^1$ 几乎处处收敛于 Tf^1. 若令 $f_n=g_{m_n}^0+g_{m_n}^1$，就得到一个序列 $\{f_n\}$，满足所要求的性质：

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0,$$

且几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}(Tf_n)(x)=(Tf^0)(x)+(Tf^1)(x)=(Tf)(x).$$

我们还需去掉 $\alpha>0$, $\beta<1$ 的限制. 然而这时比所考虑过的情况更为简单. 若 $\alpha=0$, $\beta=1$，则 $(p_0,\ q_0)$, $(p_1,\ q_1)$ 中至少有一对

是$(\infty, 1)$，这是无需证明的. 若$\alpha>0$, $\beta=1$，那我们在上述证明中，对一切$z\in C$取$g_z=g$，则上述论证仍然成立. 类似地，若$\alpha=0$, $\beta<1$，取$f_z=f$，仍可进行上述的论证. 于是定理1.3证毕. 】

M. Riesz 凸性定理是分析中的一个强有力的工具，除(1.1)和(1.2)外，许多重要的不等式都可以从它得到. 然而，有时我们会遇到一族算子$\{T_t\}$, $0\leqslant t\leqslant 1$，它们把$L^{p_t}(M, d\mu_t)$有界地映入$L^{q_t}(N, d\nu_t)$，这里的算子和测度都是随t而"光滑"变化的. 我们将在第4节中引出定理1.3的推广，它可以应用到这种算子族上. 我们碰到的另一种情形是L^{p_t}空间上的算子(不一定是线性的)，$0\leqslant t\leqslant 1$，它们不一定是(p_0, q_0)和(p_1, q_1)型的，而它们仍把L^{p_t}有界地映入L^{q_t}, $0<t<1$. 我们将在下节证明，在"端点"$(p_i, q_i)(i=0, 1)$处某些较弱的条件通常就足以保证(强)(p_t, q_t)型，$0<t<1$.

§2 Marcinkiewicz 插值定理

在第二章中，我们对函数$f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$，引入了 Hardy-Littlewood 极大函数m_f，并证明了(见第二章推论3.11)把f映为m_f的算子M是(p, p)型的，$1<p\leqslant\infty$. 这一结果的证明依赖于在两"端点"处的事实：其一，M为(∞, ∞)型且具范数1，这一点是容易证明的；另一是定理3.10，它给出了限制在$L^1(E_n)$上的M的性质. 当f属于$L^1(E_n)$时，我们曾证明，m_f的分布函数[5)] λ满足不等式

$$\lambda(s)\leqslant\frac{c\|f\|_1}{s}, \text{ 对一切 } s>0, \tag{2.1}$$

其中常数c不依赖于f. 假如存在一个$(0, \infty)$上的可积函数φ，满足$\lambda(s)\leqslant\varphi(s)\|f\|_1$，那么利用等式$\|m_f\|_1=\int_0^\infty\lambda(s)ds$ (见第二章(3.9))，就可以断定算子是$(1, 1)$型的. 然而(2.1)对于一般

5) 若$(M, \mathscr{M}, \mu)$是一个测度空间，g是M上的可测函数，在非负实数s处之值为$\lambda(s)=\mu\{x\in M; |g(x)|>s\}$的函数$\lambda$叫作$g$的**分布函数**. 我们在第二章第3节中曾引入过这个概念，在那里，$M=E_n$, μ是 Lebesgue 测度.

$L_1(E_n)$ 的函数来说是不能改进的(这一点当取 f 为区间 $(0, 1)\subset E_1$上的特征函数时，计算 m_f 就可看出)。

我们用以阐明 M 是 (p, p) 型 $(1<p\leqslant\infty)$ 的论证，也可以推广到一个一般的定理——Marcinkiewicz 插值定理，它涉及的是把 L^p 空间映入 L^q 空间的算子. 这个结果在第 1 节末尾所述的意义下，推广了 M. Riesz 凸性定理(即，较弱的端点条件仍能保证中间值的有界性，而且能包括比线性算子更为一般的算子)；另一方面，这个结果不能对定理 1.3 所考虑的一切数对 (p, q) 都适用，也不能得到关于范数凸性的类似结果.

为了叙述 Marcinkiewicz 定理，我们需要引入几个新概念. 设 D 是 $(M, \mathscr{M}, \mu)$ 上可测函数的线性空间，T 是定义在 D 上的算子，其值为另一测度空间 $(N, \mathscr{N}, \nu)$ 上的可测函数. 我们说 T 是**次可加的**，如果对任何 f_1, f_2 属于 D 和几乎一切 N 中之 x，有

$$(2.2)\qquad |[T(f_1+f_2)](x)|\leqslant|[Tf_1](x)|+|[Tf_2](x)|.$$

如果 D 包含一切有限测度集上特征函数的有限线性组合，还包含 D 之元素的截函数，则若存在一个不依赖于 $f\in L^p(M)\cap D$ 的常数 k，使得

$$(2.3)\qquad \lambda(s)\leqslant\left(\frac{k\|f\|_p}{s}\right)^q,$$

其中 λ 是 Tf 的分布函数，$1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$，我们就说 T 是**弱** (p, q) 型的. 当 $q=\infty$ 时，不等式(2.3)由条件 $\|Tf\|_q\leqslant k\|f\|_p$ 代替. 使不等式成立的 k 之最小值，称为 T 的弱 (p, q) 范数.

容易看出，若一个算子是 (p, q) 型的，就必定是弱 (p, q) 型的. 这在 $q=\infty$ 时是明显的. 现设 $q<\infty$, $f\in L^p(M)\cap D$, $s>0$, 且 $\lambda(s)=\nu\{x\in N;\ |(Tf)(x)|>s\}=\nu(E_s)$ 是 Tf 的分布函数，那么，

$$s^q\lambda(s)=s^q\int_{E_s}d\nu\leqslant\int_{E_s}|Tf|^q d\nu\leqslant\|Tf\|_q^q\leqslant(k\|f\|_p)^q.$$

被 s^q 除后，就得出(2.3).

Marcinkiewicz 插值定理现可叙述如下：

定理 2.4 设 T 是弱 (p_j, q_j) 型的次可加算子，其中 $1\leqslant p_j\leqslant q_j\leqslant\infty$, $j=0, 1$, 且 $q_0\neq q_1$, 那么，当 $0<t<1$ 时，若

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},$$

T 便是$(p_t,\ q_t)$型的.

我们将在下一节引入函数空间的一个类(包括 L^p 空间),它是定理2.4的扩展的自然背景. 由于我们要在第3节中给出这一扩展的证明,故就不在这里证明 Marcinkiewicz 定理,而把本节的其余部份用于介绍这一插值定理的一个重要应用.

在第三章我们曾引入了 Hilbert 变换并谈到了它的一些性质(见第三章(6.14)),还特别指出它是一个$(p,\ p)$型的算子, $1<p<\infty$. 下面我们将用 Marcinkiewicz 定理来证明这一结果. 为此只需说明这一算子是(2, 2)型的,且又是弱(1, 1)型的. 由于前文关于 Hilbert 变换谈得非常简单,因而现在我们还需进一步建立它的一些性质.

设 $f\in L^p(-\infty,\ \infty)$, $1\leqslant p<\infty$,且是实值的,那么,根据第二章的定理2.1和3.16得知, f 的 Poisson 积分

$$u(x+iy)=u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

是上半平面 E_2^+ 上的调和函数,并且对几乎所有 $x_0\in(-\infty,\ \infty)$, $u(z)=u(x+iy)$ 非切向收敛于 $f(x_0)$,同时,对一切 $y>0$,有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_p. \tag{2.5}$$

不难证明,存在(唯一)一个 E_2^+ 上的调和函数 v,使得 $F=u+iv$ 在 E_2^+ 上是解析的,并且对一切 $x\in(-\infty,\ \infty)$,

$$\lim_{y\to\infty}v(x+iy)=0.$$

这样的函数可以由 f 与共轭 Poisson 核

$$Q(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

$(-\infty<x<\infty,\ y>0)$做卷积而得到(见第三章(6.13)). 就是说

$$\begin{aligned}v(x,\ y)=v(x+iy)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+y^2}\,dt.\end{aligned}$$

因为 $$P(x, y)+iQ(x, y)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$
$$=\frac{i}{\pi}\frac{1}{x+iy}=\frac{i}{\pi z}$$

在 E_2^+ 上解析，故立即可知 $F(z)=u(z)+iv(z)$ 也在 E_2^+ 上解析．而当 $y\to\infty$ 时，$v(x+iy)$ 趋于 0 是显然的．

引理 2.6 在几乎每个点 $x_0\in(-\infty, \infty)$ 处，函数 $F(z)$（$z=x+iy\in E_2^+$）有非切向极限 $f(x_0)+i\tilde{f}(x_0)$．

证明 通过分别考虑 f 的正部与负部，我们可以把问题归结为 $f\leqslant 0$ 的情形．于是，$u\leqslant 0$，且函数 $G=\exp\{u+iv\}=e^F$ 的绝对值 $e^u\leqslant 1$．因之，依第二章定理 3.19，$G(z)$ 在边界上几乎处处有非切向极限．由于 u 是 Poisson 积分，所以这个极限不可能在一正测度集上为 0．于是，在几乎一切边界点 $x_0\in(-\infty, \infty)$ 处，$v(z)$ 必有非切向极限（模 2π）．就是说，当 z 非切向趋向 x_0 时，$v(z)$ 的极限点形如 $a+2k\pi$，其中 k 是整数．而由 $v(z)$（$z\in E_2^+$）的连续性立即可知，当 z 非切向趋向 x_0 时，若 $v(z)$ 有两个不同的极限点 a, b，则 a, b 间的一切点就都是这个值集的极限点．因此，仅当 $v(z)$ 有非切向极限时，它才能有非切向极限（模 2π）．引理得证． 】

若如引理 2.6，我们令 $\tilde{f}(x_0)$ 表示 $v(z)$ 的非切向极限，我们就得到一个几乎处处有定义的函数．映射 $f\to\tilde{f}$（我们已经证明它对一切 $f\in L^p(-\infty,\infty)$，$1\leqslant p<\infty$，有定义）就叫作 Hilbert 变换．在第三章中（见第三章(6.13)）我们曾指出如何证明 Hilbert 变换是 (2, 2) 型的．首先我们看到，对每个 $y>0$，

$$\hat{Q}_y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi itx}Q(x, y)dx=(-i\operatorname{sgn}t)e^{-2\pi|yt|}.$$

于是，因 $v(\cdot, y)$ 是 $Q(\cdot, y)$ 和 f 的卷积，故

$$\hat{v}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi itx}v(x, y)dx=(-i\operatorname{sgn} t)e^{-2\pi|yt|}\hat{f}(t)$$

对几乎一切 t 成立．所以由 Plancherel 定理和 Fatou 引理，有

$$\|\tilde{f}\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2dx\leqslant\liminf_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|v(x+iy)|^2dx$$

$$=\liminf_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{v}_y(t)|^2dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\|f\|_2^2.$$

这就是所要的不等式，它说明 Hilbert 变换是(2, 2)型的：对一切 $f\in L^2(-\infty, \infty)$，

(2.7) $$\|\tilde{f}\|_2\leqslant\|f\|_2.$$ [6]

引理 2.8 Hilbert 变换是弱(1, 1)型的.

证明 分别考虑 $L^1(-\infty, \infty)$中函数的正部和负部，我们可以把问题归结为 $f\geqslant 0$ 的情形. 同前，我们令

(2.9) $$F(z)=F(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\{P(x-t, y)+iQ(x-t, y)\}dt,$$

$z\in E_2^+$. 那么，当 $s>0$ 时，$w(x, y)=\log|1+sF(z)|$ 便是 E_2^+ 中的调和函数，而且它在每个本征子半空间 $\{x+iy; y\geqslant y_0>0\}$ 上有界. 于是依第二章引理 2.7，只要 $0<\eta<y$，就有

$$w(x, y)=\pi\log|1+sF(x+iy)|$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\log|1+sF(\xi+i\eta)|d\xi.$$

令 $\eta\to 0$，再应用引理 2.6 和 Fatou 引理，我们看出上面的积分大于或等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi.$$

因而，上式乘 y 并利用对数函数的初等性质，我们得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi$$
$$\leqslant y\log|1+sF(x+iy)|\leqslant y\log(1+s|F(x+iy)|)$$
$$\leqslant ys|F(x+iy)|.$$

---

6) 把证明加以修改，就可得知(2.7)的反向不等式也是成立的(那么，Hilbert 变换便是 $L^2(-\infty, \infty)$上的酉算子). 这个问题还要在第六章中更一般地讨论，那时，我们要引进 Riesz 变换.

另一方面，从(2.9)立即推出，当 y 趋向 ∞ 时，$\pi yF(x+iy)$ 趋向于 $\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi$. 在上述不等式的首项和末项中，令 y 趋向 ∞，就得出

$$(2.10)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi\leqslant s\|f\|_1.$$

如果 $E_\tau=\{\xi\in(-\infty,\ \infty):|\tilde{f}(\xi)|>\tau\}$, $\tau>0$, $m(E_\tau)$ 表示 E_τ 的 Lebesgue 测度，则(2.10)蕴含

$$\begin{aligned}(\log s\tau)m(E_\tau)&\leqslant\int_{E_\tau}\log|s\tilde{f}(\xi)|\,d\xi\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi\\&\leqslant s\|f\|_1.\end{aligned}$$

我们现取 $s=e/\tau$，便得出所需的弱型不等式 $m(E_\tau)\leqslant e\|f\|_1/\tau$. 】

取 $p_0=1=q_0$, $p_1=2=q_1$，对 Hilbert 变换应用定理 2.4 得知，存在一个不依赖于 $f\in L^p(-\infty,\ \infty)$ 的常数 A_p, $1<p\leqslant 2$, 使得 $\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$. 不难看出，这个不等式对 $2\leqslant p<\infty$ 也是成立的. 首先我们看出，Hilbert 变换作为卷积算子的极限，与平移变换可交换. 那么，不等式

$$(2.11)\qquad \|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$$

$f\in L^p(-\infty,\ \infty)$, $1<p<\infty$, 便可由刚才建立的对 $1<p\leqslant 2$ 成立的不等式和第一章定理 3.20 推出.

§3 L(p, q) 空 间

弱 $(r,\ p)$ 型的算子是把 L^r 空间映入一个函数类的算子，该函数类中的函数 f 有分布函数 λ, 满足

$$(3.1)\qquad \sup_{s>0}\Phi(s)=\sup_{s>0}\{s[\lambda(s)]^{1/p}\}=A<\infty.$$

这个不等式可以改述为 Φ 的 L^∞ 范数有限. 我们已经知道

$$(3.2)\qquad \|f\|_p=\left(\int_0^\infty s^p d\{-\lambda(s)\}\right)^{1/p}=\left(p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda(s)ds\right)^{1/p}$$

(见第二章(3.6)). 那么, f 属于 L^p 当且仅当 Φ 关于测度 $d\nu(s) = [1/\lambda(s)]d\{-\lambda(s)\}$ 属于 $L^p(0, \infty)$. 事实上, 我们有

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty [\Phi(s)]^p d\nu(s)\right)^{1/p}.$$

假定我们不考虑 Φ 的 L^∞ 范数或 L^p 范数, 而代之以 L^q 范数, $1 \leqslant q < \infty$, 也就是说, 我们加上条件

$$\left(\int_{-\infty}^\infty [\Phi(s)]^q d\nu(s)\right)^{1/q} < \infty. \tag{3.3}$$

这时我们可以问, 是否能插入一个把 L^r 空间映入满足(3.3)的函数类的算子. 在本节中, 我们将研究这样定义的函数空间, 并说明它们给 Marcinkiewicz 定理提供了一个自然的背景.

(3.3)中的表达式不是一个范数. 然而有一些等价于(3.3)的不等式, 他们大多包含着范数的有限性. 为了得到这些条件, 我们引进测度空间$(M, \mathscr{M}, \mu)$上可测函数 f 的非增重排 f^* 的概念. 如果 λ 表示 f 的分布函数, 则 f^* 定义为

$$f^*(t) = \inf\{s: \lambda(s) \leqslant t\}, \quad t > 0.$$

显然, 函数 λ 是非增的[7]. 假如它是连续、严格递降的正实值函数, 它必定会有具同样性质的反函数. 从上述定义立即可知, 这时 f^* 就是这个反函数. 下面的一组引理可用来建立 λ 和 f^* 的某些基本性质. 此后, 我们将假定 $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(s) = 0$, 并因而对一切 $t > 0$, $f^*(t) < \infty$.

引理 3.4 (i) λ 和 f^* 是非增和右连续的, (ii) 对一切 $t > 0$, $\lambda(f^*(t)) \leqslant t$, (iii) f 和 f^* 有相同的分布函数.

证明 前曾得到 λ 是非增的. 由定义立即可知, f^* 也是非增的. λ 的右连续性可从 μ 的下连续性和

$$\lim_{s > s_0, s \to s_0} \{x \in M: |f(x)| > s\} = \{x \in M: |f(x)| > s_0\}$$

推出. 不等式(ii)由此右连续性立即可得.

---

7) 因为当 $s_1 > s_2$ 时, 有 $\{x \in M: |f(x)| > s_1\} \subset \{x \in M: |f(x)| > s_2\}$, 且测度 μ 是单调的.

为了证明 f^* 在 t_0 处右连续，我们首先注意到当 $f^*(t_0)=0$ 时是显然的(因为这时，由于 f^* 是非负且非增的，故 $t>t_0$ 时，$f^*(t)=0$)．若 $f^*(t_0)$ 是正的，则取 α 使 $f^*(t_0)>\alpha>0$，并取趋于 0 的正实数列 $\{\varepsilon_n\}$．根据 f^* 的定义我们定有 $\lambda(f^*(t_0)-\alpha)>t_0$．从而存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\lambda(f^*(t_0)-\alpha)>t_0+\varepsilon_n$，而这推出，当 $n\geqslant n_0$ 时，$f^*(t_0)-\alpha<f^*(t_0+\varepsilon_n)$；如若不然，若对某个 $n\geqslant n_0$，有 $f^*(t_0)-\alpha\geqslant f^*(t_0+\varepsilon_n)$，则由(ii)和 λ 的非增性，就会产生矛盾：$\lambda(f^*(t_0)-\alpha)\leqslant\lambda(f^*(t_0+\varepsilon_n))\leqslant t_0+\varepsilon_n$．于是由于 f^* 非增，便对一切 $n\geqslant n_0$，有 $f^*(t_0)-\alpha<f^*(t_0+\varepsilon_n)\leqslant f^*(t_0)$．这就说明 f^* 是右连续的．

为了证明性质(iii)，我们首先注意到，从 f^* 的定义可推出：当且仅当 $t<\lambda(s)$ 时，$f^*(t)>s$．于是 $E_s^*=\{t>0: f^*(t)>s\}$ 恰好是区间 $(0,\lambda(s))$．根据 f^* 的分布函数在 s 的值就是集 E_s^* 的 Lebesgue 测度，就可推出性质(iii)．】

引理 3.5 设 $\{f_m\}$ 是一个可测函数列，它对一切 $x\in M$，有 $|f_m(x)|\leqslant|f_{m+1}(x)|$，$m=1,2,3,\cdots$．如果 f 是一个可测函数，满足 $|f(x)|=\lim\limits_{m\to\infty}|f_m(x)|$，$x\in M$，则

(i) 对每个 $s>0$，当 m 趋向 ∞ 时，$\lambda_m(s)$ 单调上升趋向 $\lambda(s)$，这里 λ_m 和 λ 是 f_m 和 f 的分布函数．

(ii) 对每个 $t>0$，$f_m^*(t)$ 单调上升趋向 $f^*(t)$．

证明 显然有

$$E_s^{(m)}=\{x\in M: |f_m(x)|>s\}\subset E_s=\{x\in M: |f(x)|>s\},$$

且 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_s^{(m)}=E_s$．那么由于测度 μ 是单调和下连续的，我们必定有 $\lambda_m(s)=\mu(E_s^{(m)})\leqslant\mu(E_s)=\lambda(s)$ 和 $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m(s)=\lambda(s)$．这就证明了(i)．依照非增重排的定义可以推知，$f_m^*(t)\leqslant f_{m+1}^*(t)\leqslant f^*(t)$，$m=1,2,\cdots$．令 $l=\lim\limits_{m\to\infty}f_m^*(t)$．由于 $f_m^*(t)\leqslant l$，我们有 $\lambda_m(l)\leqslant\lambda_m(f_m^*(t))\leqslant t$(后一不等式是引理 3.4 之(ii)的推论)．于是，

$$\lambda(l)=\lim_{m\to\infty}\lambda_m(l)\leqslant t,$$

这就推出了 $f^*(t)\leqslant l$．但由不等式 $f_m^*(t)\leqslant f^*(t)$ 我们又得到 $l\leqslant$

$f^*(t)$. 因此得出 $l=f^*(t)$. 引理得证.]

这个引理在证明 λ 和 f^* 的其它性质时特别有用, 因为它使我们能把其证明归结为 f 是简单函数的情形. 而这种函数的分布函数和非增重排描述起来又特别简单. 设 $f=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{E_j}$, 其中 $E_j\in\mathscr{M}$, $\mu(E_j)>0$, 且若 $j\neq k$ $E_j\cap E_k=\emptyset$. 经重新标号, 我们可以认为 $c_1>c_2>\cdots>c_n>c_{n+1}=0$. 令 $d_j=\mu(E_1)+\cdots+\mu(E_j)$, $1\leqslant j\leqslant n$, 并令 d_0 为 0. 那么 f 的分布函数 λ 便有形式

$$\lambda(s)=\begin{cases}d_j, & \text{当 } c_{j+1}\leqslant s<c_j,\ 1\leqslant j\leqslant n;\\ 0, & \text{当 } c_1\leqslant s.\end{cases} \tag{3.6}$$

从而推出

$$f^*(t)=\begin{cases}c_j, & \text{当 } d_{j-1}\leqslant t<d_j,\ 1\leqslant j\leqslant n;\\ 0, & \text{当 } d_n\leqslant t.\end{cases} \tag{3.7}$$

所以, 对 $p>0$, 我们得知

$$\sup_{s>0} s[\lambda(s)]^{1/p}=\sup_{1\leqslant j\leqslant n} d_j^{1/p}c_j=\sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t).$$

由此容易证明, (3.1)中的上确界可以用该函数的非增重排表示.

引理 3.8 若 f 可测, λ 是其分布函数, $p>0$, 那么(3.1)成立当且仅当

$$\sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t)=A<\infty.$$

证明 我们刚才看到, 当 f 是简单函数时引理 3.8 成立. 如果 f 仅是可测函数, 我们可以找出一个非负简单函数列 $\{f_m\}$, 它在 M 的一切点上单调上升趋于 $|f|$. 这样从引理 3.5 立即推出引理 3.8.]

鉴于不等式(3.3)和它前面的评注, 我们自然去考虑满足以下条件的可测函数 f 的空间 $L(p, q)$: 当 $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$ 时,

$$\|f\|_{pq}^*=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p}f^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty,$$

当 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $q=\infty$ 时,

$$\|f\|_{pq}^{*}=\sup_{t>0} t^{1/p} f^{*}(t)<\infty$$ [8]。

当 f 是简单函数时，我们立即从(3.7)看出

(3.9) $$\|f\|_{p}=\left(\int_{M}|f|^{p} d\mu\right)^{1/p}=\left(\int_{0}^{\infty}[f^{*}(t)]^{p} dt\right)^{1/p}$$
$$=\|f^{*}\|_{p},\ 1\leqslant p<\infty,$$

以及

(3.9′) $$\|f\|_{\infty}=\|f^{*}\|_{\infty}.$$

从引理 3.5 我们得知，这些等式对一切 $f\in L^{p}(M)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 都成立. 因

$$\|f\|_{pp}^{*}=\left(\int_{0}^{\infty}[t^{1/p} f^{*}(t)]^{p}(dt/t)\right)^{1/p}$$
$$=\left(\int_{0}^{\infty}[f^{*}(t)]^{p} dt\right)^{1/p}=\|f^{*}\|_{p},$$

从而 $L(p, p)=L^{p}(M)$, 且 $\|\ \|_{pp}^{*}$ 是范数. 但是一般说来, $\|\ \|_{pq}^{*}$ 不是范数, 因为 Minkowski 不等式可能不成立. 尽管如此, 我们将证明 $\|\ \|_{pq}^{*}$ 可用以引进 $L(p, q)$ 上的拓扑, 且在多数情况下, 可以证明它是 Banach 空间上的拓扑.

在 $\|\ \|_{pq}^{*}$ 的定义中之所以置常数 q/p, 有几个理由. 这样定义的直接推论之一是, 只要 E 是有限测度集 M 的可测子集, χ_{E} 是它的特征函数, $\|\chi_{E}\|_{pq}^{*}$ 就不依赖于 q. 事实上, 当 $1\leqslant q\leqslant\infty$ 时, 我们有

(3.10) $$\|\chi_{E}\|_{pq}^{*}=\{\mu(E)\}^{1/p}.$$

这个等式是下述事实的反映: 每个 $L(p, q)$ 空间对固定的 p 来说是"L^{p} 型空间". 下面的定理给出这一论断的精确表述. 它也表明在某种意义下, $L(p, 1)$ 是使 (3.10) 成立的"最小"赋范线性空间, 而 $L(p, \infty)$ 是这种空间中"最大"的.

定理 3.11 若 $f\in L(p, q_{1})$, 且 $q_{1}\leqslant q_{2}$, 则

---

8) 这些定义对 $0<p<1$ 和 $0<q<1$ 也有意义, 但我们感兴趣的是把 $L(p, q)$ 变换到 Banach 空间, 所以对这些情形不予考虑. 此外, 在上述定义中, 我们采用惯常的约定 $1/\infty=0$. 注意: 我们只对 $q=\infty$ 定义了 $L(\infty, q)$.

(i) $\|f\|^*_{pq_2} \leqslant \|f\|^*_{pq_1}$,

因而,

(ii) $L(p,\ q_1) \subset L(p,\ q_2)$[9],

设 $\|\ \ \|$ 是定义在 M 上的简单函数类上的保序范数(意即当 $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ 几乎处处成立时, $\|g\| \leqslant \|f\|$). 则

(iii) 对一切 $E \in \mathscr{M}$, $\|\chi_E\| \leqslant \{\mu(E)\}^{1/p}$ 蕴含对一切简单函数 f, $\|f\| \leqslant \|f\|^*_{p1}$,

(iv) 对一切 $E \in \mathscr{M}$, $\{\mu(E)\}^{1/p} \leqslant \|\chi_E\|$ 蕴含对一切简单函数 f, 有 $\|f\|^*_{p\infty} \leqslant \|f\|$.

证明 当 $q_2=\infty$ 时, 不等式(i)可用特别简单的方法证明. 因 f^* 是非增的, 故

$$t^{1/p}f^*(t) = f^*(t)\left\{(q_1/p)\int_0^t u^{(q_1/p)-1}du\right\}^{1/q_1}$$

$$\leqslant \left\{(q_1/p)\int_0^t [u^{1/p}f^*(u)]^{q_1}\frac{du}{u}\right\}^{1/q_1} \leqslant \|f\|^*_{pq_1}.$$

对一切 $t>0$ 取 $t^{1/p}f^*(t)$ 的上确界, 就得到所要的不等式.

当 $q_2<\infty$ 时, 按引理 3.5, 我们只需对简单函数 f 建立这一引理, 所以, 我们可假定 f^* 有(3.7)的形式. 此时,

$$\|f\|^*_{pq} = \left\{\sum_{j=1}^n c_j^q\left(d_j^{(q/p)} - d_{j-1}^{(q/p)}\right)\right\}^{1/q}.$$

令 $a_j = c_j^{q_1}$, $b_j = d_j^{q_2/p}$, $\theta = q_1/q_2$, 则不等式等价于

$$\text{(a)} \qquad \sum_{j=1}^n a_j(b_j - b_{j-1}) \leqslant \left\{\sum_{j=1}^n a_j^\theta(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta)\right\}^{1/\theta},$$

其中, $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$, $0=b_0<b_1<\cdots<b_n$, $0<\theta\leqslant 1$. 我们用归纳法来证明(a). 当 $n=1$ 时, 这个不等式就是 $a_1b_1 \leqslant \{a_1^\theta b_1^\theta\}^{1/\theta}$,

9) 为得到这个包含关系, 我们只需证明, 存在一个不依赖于 $f\in L(p,\ q_1)$ 的常数 B, 使得 $\|f\|^*_{pq_2} \leqslant B\|f\|_{pq_1}$. 我们可以找到证明这一不等式的简便方法. 例如:

$$\left(\int_0^\infty [t^{1/p}f^*(t)]^{q_2}\frac{dt}{t}\right)^{q_1/q_2} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}[f^*(2^{k-1})]^{q_2}\int_{2^{k-1}}^{2^k} t^{(q_2/p)-1}dt\right)^{q_1/q_2}$$

$$\leqslant B'\sum_{k=-\infty}^{\infty}[f^*(2^{k-1})]^{q_1}2^{kq_1/p_2}$$

$$\leqslant B''\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-2}}^{2^{k-1}}[t^{1/p}f^*(t)]^{q_1}\frac{dt}{t} \leqslant B'''\{\|f\|^*_{pq_1}\}^{q_1}.$$

然而不等式(i)是更精细的, 证明它较为困难. 等式(3.10)表明(i)是最佳结果.

它显然是成立的.

假定(a)对 $n=N$ 成立. 对 $0\leqslant x\leqslant a_N$, 我们令

$$\varphi(x)=\left\{\sum_{j=1}^{N}a_j^\theta(b_j^\theta-b_{j-1}^\theta)+x^\theta(b_{N+1}^\theta-b_N^\theta)\right\}^{1/\theta}$$

$$=(A+x^\theta B)^{1/\theta},$$

$$l(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j(b_j-b_{j-1})+x(b_{N+1}-b_N)=A_1+xB_1.$$

我们要证明, 当 $0<a_{N+1}<a_N$ 时, 有 $\varphi(a_{N+1})\geqslant l(a_{N+1})$. 根据归纳假定 $\varphi(0)\geqslant l(0)$, $\varphi(a_N)\geqslant l(a_N)$ (这后一不等式, 以 b_{N+1} 代替 b_N 就化为(a)). 另一方面, 由于 φ 的导数 $\varphi'(x)=B(Ax^{-\theta}+B)^{(1/\theta)-1}$ 在正实轴上递降, 函数 φ 必定是凹的. 所以, 根据 φ 在端点 0 和 a_N 处控制着线性函数 l, 可以推出对 $0\leqslant x\leqslant a_N$ 有 $\varphi(x)\geqslant l(x)$. 这就证明了(i). 而(ii)则是(i)的直接推论.

因 $\|\ \|$ 是保序的, 我们只需对非负简单函数 $f=\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{E_j}$ 证明(iii)即可. 我们假定 $c_1>c_2>\cdots>c_n>c_{n+1}=0$, 且集 $E_1,\ \cdots,\ E_n$ 两两互不相交. 当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 时, 我们定义 $f_k=b_k\chi_{F_k}$, 其中

$$F_k=\bigcup_{j=1}^{k}E_j,\quad b_k=c_k-c_{k+1}.$$

那么显然有

$$\text{(b)}\qquad f^*(t)=\sum_{k=1}^{n}f_k^*(t),\ t>0,$$

并且

$$\|f\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|=\sum_{k=1}^{n}b_k\|\chi_{F_k}\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k\{\mu(F_k)\}^{1/p}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p}f_k^*(t)\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p}\sum_{k=1}^{n}f_k^*(t)\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p}f^*(t)\frac{dt}{t}=\|f\|_{p1}^*.$$

这就证明了(iii).

为了证明(iv)，我们注意到，按照等式(3.6)前面所引入的记号，我们有

$$\|f\|_{p\infty}^{*}=\sup_{1\leqslant j\leqslant n} d_j^{1/p}c_j$$

(这一事实是从$\|\ \ \|_{p\infty}$的定义和(3.7)后的等式得到的). 假设等式右端的上确界在$j=k$取到，那么，

$$\|f\|_{p\infty}^{*}=d_k^{1/p}c_k.$$

令$g=c_k\chi_{F_k}$. 则$0\leqslant g\leqslant f$，且

$$\begin{aligned}\|f\|_{p\infty}^{*}&=d_k^{1/p}c_k=c_k\{\mu(F_k)\}^{1/p}\\&\leqslant c_k\|\chi_{F_k}\|=\|g\|\leqslant\|f\|.\end{aligned}$$

于是定理得证. 】

把各空间$L(p,\ q)$与矩形$Q=\{(x_1,\ x_2)\in E_2;\ 0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant 1\}$中的点$(1/p,\ 1/q)$联系起来是有用的. 作为定理3.11 (ii) 之推论，我们看到，当固定$x_1=1/p$，而允许$x_2=1/q$从1到0变动时，我们就得到一些点，它们与增大着的函数空间族相应. 当点在矩形Q的对角线$\{(x_1,\ x_2)\in Q;\ x_1=x_2\}$上时，与之相应的空间就是$L^p$(见(3.9)). 依照第二节中弱型算子的定义，我们自然地把$L(p,\ \infty)$——我们所遇到的这种空间中之最大者——当作弱L^p. 这种说法之所以合理，是因为依引理3.8，在定义弱$(r,\ p)$型算子时用到的不等式(2.3)，等价于

$$\|Tf\|_{p\infty}^{*}\leqslant k\|f\|_r.$$

因为$\|f\|_r=\|f\|_{rr}^{*}$，$r\geqslant 1$，从而依定理3.11之(i)，有$\|f\|_r\leqslant\|f\|_{r1}^{*}$. 于是弱$(r,\ p)$型算子$T$对于$T$的定义域中和$L(r,\ 1)$中之$f$满足较弱的不等式

$$\|Tf\|_{p\infty}^{*}\leqslant k\|f\|_{r1}^{*}. \tag{3.12}$$

本节所要证明的插值定理在某种程度上说明，象(3.12)那样的端点条件虽然比弱型条件要弱，但是足以保证Marcinkiewicz定理(2.4)成立. 与定理3.11之(iii)密切相关的是Marcinkiewicz定理的假设还可进一步简化. 实际上，我们有以下结果，它表明定理2.4的结论只依赖于有限测度集的特征函数在端点处的弱型不等式是否成立.

定理3.13 假定 T 是线性算子，它把有限测度集 $E\subset M$ 的特征函数 χ_E 的有限线性组合映入一个向量空间 B，这一空间具有保序范数. 若

$$\|T\chi_E\|\leqslant C\|\chi_E\|_{r1}^*=C\{\mu(E)\}^{1/r},$$

其中 C 不依赖于 E，则存在一个常数 A，使得对于 T 的定义域中之一切 f，有

$$\|Tf\|\leqslant A\|f\|_{r1}^*.$$

证明 若 $f\geqslant 0$ 属于 T 的定义域，我们就可以将它表作

$$f=\sum_{k=1}^n f_k,$$

此处，函数 f_k 是证明定理 3.11 时定义的满足等式(b)的多重特征函数，那么，

$$\|Tf\|=\left\|\sum_{k=1}^n Tf_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^n\|Tf_k\|\leqslant\sum_{k=1}^n Cb_k\|\chi_{F_k}\|_{r1}^*.$$

正如定理 3.11(iii)之证明所示，最后的和式等于 $C\|f\|_{r1}^*$. 若 $f=f_1+if_2$ 是复值的，则对 f_1 和 f_2 的正部与负部应用我们刚才已证的结果，就得到定理，此时 $A=4C$[10]. 】

我们一直在讨论的插值定理是下面一个古典估计式——著名的 Hardy 不等式——的推论.

引理3.14 如果 $q\geqslant 1$, $r>0$, 且 g 是$(0,\infty)$上的非负函数，则

(i) $$\left(\int_0^\infty\left[\int_0^t g(u)\,du\right]^q t^{-r-1}dt\right)^{1/q}$$
$$\leqslant(q/r)\left(\int_0^\infty[ug(u)]^q u^{-r-1}du\right)^{1/q},$$

(ii) $$\left(\int_0^\infty\left[\int_t^\infty g(u)du\right]^q t^{r-1}dt\right)^{1/q}$$
$$\leqslant(q/r)\left(\int_0^\infty[ug(u)]^q u^{r-1}du\right)^{1/q}.$$

10) 定理 3.11 之 (iii) 是定理 3.13 在 T 是恒等算子时的特殊情形. 显然，定理 3.11 的证明对次线性算子，即次可加、正齐性算子(对任何纯量 a, $|Taf|=|a||Tf|$)也是成立的.

证明 我们首先指出，(i) 可推得 (ii). 若把 (i) 用于函数 $g_1(v)=u^{-2}g(u^{-1})$上，就得出

$$\int_0^\infty\left[\int_0^t g_1(u)du\right]^q t^{-r-1}dt=\int_0^\infty\left[\int_{1/t}^\infty g(v)dv\right]^q t^{-r-1}dt$$
$$=\int_0^\infty\left[\int_s^\infty g(v)dv\right]^q s^{r-1}ds$$

要小于或等于$(q/r)^q$乘以

$$\int_0^\infty[ug_1(u)]^q u^{-r-1}du=\int_0^\infty[vg(v)]^q v^{r-1}dv.$$

因此，我们只需建立不等式(i).

应用 Jensen 不等式，取

$$\varphi(x)=|x|^q,\ d\mu(u)=u^{(r/q)-1}$$

(见第二章 § 4, 例2)，我们得到

$$\left[\int_0^t g(u)du\right]^q=\left[\int_0^t g(u)u^{1-(r/q)}u^{(r/q)-1}du\right]^q$$
$$\leqslant\left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}t^{r(1-1/q)}\int_0^t[g(u)]^q u^{q-r-1+r/q}du.$$

于是

$$\int_0^\infty\left[\int_0^t g(u)du\right]^q t^{-r-1}dt$$
$$\leqslant\left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty t^{-1-r/q}\left[\int_0^t[g(u)]^q u^{q-r-1+r/q}du\right]dt$$
$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty[g(u)u]^q u^{-r-1+r/q}\left(\int_u^\infty t^{-1-r/q}dt\right)du$$
$$=\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^\infty[g(u)u]^q u^{-r-1}du.$$

则 Hardy 不等式得证. 】

现在我们可以叙述并证明本节的主要结果. 我们说次可加算子 T 是限制弱$(r,\ p)$型的，如果它的定义域 D 包含其元素的所有截函数，而且还包含有限测度集之特征函数的所有有限线性组合，并且当 $f\in D\cap L(r,\ 1)$ 时，f 满足不等式(3.12). 鉴于定理 3.13, 当我们把这种算子限制于有限测度集的特征函数时，可以认为它

是满足弱(r, p)型条件的.

定理3.15 设T是限制弱(r_j, p_j)型次可加算子, $j=0, 1$, 且$r_0<r_1$, $p_0\neq p_1$, 则存在一个常数$B=B_\theta$, 使得对T之定义域与$L(r, q)$之交中的一切f, 有

$$\|Tf\|_{pq}^*\leqslant B\|f\|_{rq}^*,$$

其中, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 且

$$\frac{1}{p}=\frac{(1-\theta)}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad \frac{1}{r}=\frac{(1-\theta)}{r_0}+\frac{\theta}{r_1},\quad 0<\theta<1.$$

证明 对于$f\in L(r, q)\cap D$, 定义

$$f^t(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } |f(x)|>f^*(t^\gamma); \\ 0, & \text{当 } |f(x)|\leqslant f^*(t^\gamma), \end{cases}$$

和$f_t(x)=f(x)-f^t(x)$, 其中

$$\gamma=\frac{(1/p_0)-(1/p)}{(1/r_0)-(1/r)}=\frac{(1/p)-(1/p_1)}{(1/r)-(1/r_1)}.$$

那么, 我们就可得出下述两个不等式

$$(f^t)^*(s)\leqslant\begin{cases} f^*(s), & \text{当 } 0<s<t^\gamma; \\ 0, & \text{当 } t^\gamma\leqslant s, \end{cases}$$

(a)

和

$$f_t^*(s)\leqslant\begin{cases} f^*(t^\gamma), & \text{当 } 0<s<t^\gamma; \\ f^*(s), & \text{当 } t^\gamma\leqslant s. \end{cases}$$

当f是简单函数时, 容易从类似于(3.7)的式子导出(a); 而对一般情形, 则可利用简单函数的情形而得到. 因为算子T是次可加的, 即对几乎每个$y\in N$, $|[Tf](y)|=|[T(f^t+f_t)](y)|\leqslant|[Tf^t](y)|+|[Tf_t](y)|$. 于是当$s>0$时,

$$\begin{aligned}\{y\in N: |[Tf](y)|>(Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s)\} \\ \subset\{y\in N: |[Tf^t](y)|>(Tf^t)^*(s)\} \\ \cup\{y\in N: |[Tf_t](y)|>(Tf_t)^*(s)\}.\end{aligned}$$

若λ, λ^t和λ_t分别是Tf、Tf^t和Tf_t的分布函数, 则由此包含关系和引理3.4之(ii), 可得

$$\lambda((Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s))\leqslant\lambda^t((Tf^t)^*(s))$$
$$+\lambda_t((Tf_t)^*(s))\leqslant s+s=2s.$$

所以，按照$(Tf)^*$的定义，对一切$s>0$，我们有

(b) $$(Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s)\geqslant(Tf)^*(2s).$$

假定$r_1<\infty$，$q<\infty$，那么，在(b)中取$s=t$，进行变量代换，再由 Minkowski 不等式，我们得到

$$\|Tf\|_{pq}^*=(q/p)^{1/q}\left\{\int_0^\infty[t^{1/p}(Tf)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}$$
$$=(q/p)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty[t^{\frac{1}{p}}(Tf)^*(2t)]^q\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant(q/p)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^\infty[t^{\frac{1}{p}}(Tf^t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^\infty[t^{\frac{1}{p}}(Tf_t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

因为T是限制弱(r_0,p_0)和(r_1,p_1)型的，故对一切$t>0$，有$t^{1/p_0}(Tf^t)^*(t)\leqslant k_0\|f^t\|_{r_01}^*$和$t^{1/p_1}(Tf_t)^*(t)\leqslant k_1\|f_t\|_{r_11}^*$. 于是，上式括号里面的和式不大于

$$k_0\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_0)}\|f^t\|_{r_01}^*]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$
$$+k_1\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_1)}\|f_t\|_{r_11}^*]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

而从(a)之第一部份，经变量代换并应用引理 3.14 之(i)，可得到

$$\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_0)}\|f^t\|_{r_01}^*]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$
$$\leqslant\left(\int_0^\infty\left[t^{(1/p)-(1/p_0)}\left(\frac{1}{r_0}\int_0^{t^\gamma}f^*(s)s^{(1/r_0)-1}ds\right)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$
$$=|\gamma|^{-(1/q)}(1/r_0)\left(\int_0^\infty\left[u^{(1/r)-(1/r_0)}\int_0^u f^*(s)s^{(1/r_0)-1}ds\right]^q\frac{du}{u}\right)^{1/q}$$
$$\leqslant\frac{|\gamma|^{-(1/q)}}{1-(r_0/r)}\left(\int_0^\infty[u^{1/r_0}f^*(u)]^q u^{(q/r)-(q/r_0)}\frac{du}{u}\right)^{1/q}$$
$$=\frac{1}{1-(r_0/r)}\left(\frac{r}{|\gamma|q}\right)^{1/q}\|f\|_{rq}^*.$$

类似的证明(利用(a)之第二部份和引理 3.14)还给出

$$\left(\int_0^\infty [t^{(1/p)-(1/p_1)}\|f_t\|_{r_1 1}^*]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty \left[t^{(1/p)-(1/p_1)}\left(\frac{1}{r_1}\int_0^{t^\gamma} f^*(t^\gamma)s^{(1/r_1)-1}ds\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{r_1}\int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)s^{(1/r_1)-1}ds\right)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty [t^{(1/p)-(1/p_1)}f^*(t^\gamma)t^{\gamma/r_1}]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$+\frac{1}{r_1}\left(\int_0^\infty\left[t^{(1/p)-(1/p_1)}\int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)s^{(1/r_1)-1}ds\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$=|\gamma|^{-\frac{1}{q}}\left\{\left(\int_0^\infty [u^{\frac{1}{r}}f^*(u)]^q\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_1}\left(\int_0^\infty\left[u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}\int_u^\infty f^*(s)s^{\frac{1}{r_1}-1}ds\right]^q\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leqslant\left(\frac{r}{|\gamma|q}\right)^{1/q}\|f\|_{rq}^*+\frac{|\gamma|^{-1/q}}{(r_1/r)-1}$$

$$\times\left(\int_0^\infty [f^*(u)u^{1/r_1}]^q u^{(q/r)-(q/r_1)}\frac{du}{u}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\frac{r}{|\gamma|q}\right)^{1/q}\left(\frac{r_1}{r_1-r}\right)\|f\|_{rq}^*.$$

因此我们得到

$$\|Tf\|_{pq}^*\leqslant B\|f\|_{rq}^*,$$

其中
$$B=\left(\frac{r}{|\gamma|p}\right)^{1/q}2^{1/p}\left(\frac{rk_0}{r-r_0}+\frac{r_1k_1}{r_1-r}\right).$$

当 $r_1<\infty$, $q=\infty$ 时，如同上述证明一样，我们利用不等式(a)和(b)来估计 $t^{1/p}(Tf)^*(t)$, $t>0$, 得到正常数 c_1, c_2 和 c_3(实际上，$c_1=2^{1/p}k_0$, $c_2=c_3=2^{1/p}k_1$)，使得

$$t^{1/p}(Tf^*)(t)\leqslant c_1t^{(1/p)-(1/p_0)}\int_0^{t^\gamma}f^*(s)s^{(1/r_0)-1}ds$$

$$+c_2t^{(1/p)-(1/p_1)}\int_0^{t^\gamma}f^*(t^\gamma)s^{(1/r_1)-1}ds$$

$$+c_3t^{(1/p)-(1/p_1)}\int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)s^{(1/r_1)-1}ds.$$

现我们再利用 $f^*(s)s^{1/r}\leqslant\|f\|_{r\infty}^*$，就有

$$t^{1/p}(Tf^*)(t)\leqslant\left\{\frac{c_1}{(1/r_0)-(1/r)}+c_2r_1+\frac{c_3}{(1/r)-(1/r_1)}\right\}\|f\|_{r\infty}^*$$
$$=B\|f\|_{r\infty}^*,$$

因而 $\|Tf\|_{p\infty}^*\leqslant B\|f\|_{r\infty}^*$.

剩下的 $r_1=\infty$，$q=\infty$ 情形的证明，可沿用上述情形的证明方法，只是要用到估计式 $\|f_t\|_{\infty\infty}^*\leqslant f^*(t^\gamma)$. 】

显然，Marcinkiewicz 插值定理是定理 3.15 的特殊情形，而且，定理 3.15 给出了更深刻的结果，因为它谈的是空间 $L(p, q)$. 例如，我们若把它用到 Fourier 变换上，就得到下述加强了的 Hausdorff-Young 不等式(见(1.2))：

推论 3.16 若 $f\in L^p(E_n)$，$1<p\leqslant 2$，则 $\hat{f}$ 属于 $L(p', p)$，且存在常数 $B=B_p$，使

$$\|\hat{f}\|_{p'p}^*\leqslant B\|f\|_p,$$

其中
$$(1/p)+(1/p')=1.$$

本节余下的部份，将用来证明大多数 $L(p, q)$ 空间有着与 $\|\ \ \|_{pq}^*$ 紧密关联的范数；而且，具有此范数的 $L(p, q)$ 是一 Banach 空间. 为建立这些事实，我们需要下述引理.

为了记法方便，我们仅限于考虑无原子测度空间，意即 $\mathscr{M}$ 不包含原子(指其可测子集皆为零测度的正测度集). 本节所给出的结果的应用也仅限于无原子测度空间 $(E_n, \mathscr{B}, m)$，其中 $\mathscr{B}$ 由 E_n 的 Borel 子集组成，m 是 Borel-Lebesgue 测度. 这个限制只是在下面引理之(iii)的证明中用到.

引理 3.17 若 $E\in\mathscr{M}$，$F_s=\{x\in M; |f(x)|>s\geqslant 0\}$ (故 $\lambda(s)=\mu(F_s)$)，则

(i) $\int_E|f|d\mu\leqslant\int_0^{\mu(E)}f^*(t)dt$;

(ii) $\int_{F_s}|f|d\mu=\int_0^{\lambda(s)}f^*(t)dt$;

(iii) 若 $\mu(M)\geqslant t>0$，则存在一个集合 $E_t\in\mathscr{M}$，使 $\mu(E_t)=t$，且

$$\int_{E_t}|f|d\mu=\int_0^t f^*(u)du.$$

证明 显然，若 $|f_1|\leqslant|f|$，则 $f_1^*\leqslant f^*$. 那么，当 χ_E 是 E 的特征函数且 $f_1=f\chi_E$ 时，有

(a) $$\int_0^{\mu(E)} f_1^*(t)dt\leqslant\int_0^{\mu(E)} f^*(t)dt.$$

另一方面，f_1 的分布函数必定以 $\mu(E)$ 为界，因而，对于 $t>\mu(E)$，有 $f_1^*(t)=0$. 故利用(3.9)并取 $p=1$，便有

(b) $$\int_E|f|d\mu=\int_M|f_1|d\mu=\int_0^\infty f_1^*(t)dt=\int_0^{\mu(E)} f_1^*(t)dt.$$

则由不等式(a)和(b)推出(i).

为了证明(ii)，我们首先注意到，若令

$$g(t)=\begin{cases}f^*(t), & 0<t<\lambda(s);\\ 0, & \lambda(s)\leqslant t,\end{cases}$$

则 g 与 $h=f\chi_{F_s}$ 就有相同的分布函数(当 f 是简单函数时，这一点可由引理 3.4 之(iii)和式(3.6)、(3.7)直接推出. 对于一般情况，可由此简单函数情形和引理 3.5 得出). 那么，

$$\int_{F_s}|f|d\mu=\int_M|h|d\mu=\int_0^\infty g(u)du=\int_0^{\lambda(s)} f^*(u)du.$$

最后，若 $0<t\leqslant\mu(M)$，令

$$G=\{x\in M: |f(x)|>f^*(t)\},$$
$$H=\{x\in M: |f(x)|\geqslant f^*(t)\}.$$

我们有 $$\mu(G)\leqslant t\leqslant\mu(H).$$

这第一个不等式是引理 3.4 之(ii) 和 $\mu(G)=\lambda(f^*(t))$ 的直接结果. 至于第二个不等式，在 f 是简单函数时，借助于(3.6)和(3.7)是极易建立的. 而对一般情形，从引理 3.5 可得. 因为我们假定了测度空间$(M, \mathscr{M}, \mu)$不是原子的，因而就可以在 $\mathscr{M}$ 中找到一个集合 E_t，使 $G\subset E_t\subset H$，且 $\mu(E_t)=t$. 再令 $h=f\chi_{E_t}$，则当把这些函数限制在$(0, t)$上时，有 $h^*=f^*$，而当 $u\geqslant t$ 时，$h(u)=0$，所以

$$\int_{E_t}|f|d\mu=\int_M|h|d\mu=\int_0^\infty h^*(u)du=\int_0^t f^*(u)du. \qquad \rbrack$$

此引理之(i)和(iii)的一个直接推论是

$$\sup_{E\in\mathscr{M},\ \mu(E)\leq t}\int_E|f|\,d\mu=\int_0^t f^*(u)\,du. \tag{3.18}$$

若f几乎处处不为0，且$t>0$，则(3.18)式左端是正的. 因而映射$f\to t^{-1}\int_0^t f^*(u)\,du$是定义在每个空间$L^p(M)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$上的范数(范数之值为有限则是 Hölder 不等式

$$\int_E|f|\,d\mu=\int_M\chi_E|f|\,d\mu\leqslant\|f\|_p\|\chi_E\|_{p'}\leqslant t^{1/p'}\|f\|_p$$

的推论，其中$(1/p)+(1/p')=1$). 这个范数与第二章第3节引入的 Hardy-Littlewood 极大函数有密切关系. 为了看清这一关系，我们对极大函数做一些简单考察.

在第二章中引入的极大函数定义为$|f|$在一切以x为心的球面上之积分平均值的上确界. 在一维情形中，不难证明，更为一般的"非对称"极大函数也具有第二章第3节所建立的极大函数的基本性质. 所谓"非对称"极大函数是指这样的函数，它在x处之值为

$$\sup\frac{1}{h+k}\int_{x-h}^{x+k}|f(u)|\,du, \tag{3.19}$$

此处之上确界是对满足$h+k>0$的一切非负h,k取的. 这是下列不等式的一个结果：

$$\frac{1}{h+k}\int_{x-h}^{x+k}|f(u)|\,du\leqslant\frac{1}{h+k}\int_{x-(h+k)}^{x+h+k}|f(u)|\,du$$
$$\leqslant 2\sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int_{|x-u|\leqslant r}|f(u)|\,du,$$

这一不等式表明非对称极大函数不超过我们早些时候引入的极大函数的两倍. 为避免引入新记号，我们以$m=m_f$表示(3.19)所定义的函数.

假定g是定义在实直线上的非负函数，当$u<0$时，$g(u)=0$，当u限制于$[0,\infty)$时，g非增. 若$t>0$，则依$u<0$时$g(u)=0$可知，$m(t)=m_g(t)$是积分平均值

$$\frac{1}{h+k}\int_{t-h}^{t+h}g(u)du$$

在 $t-h\geqslant 0$ 时的上确界．然而因为 g 是非增的，容易证明，每个这种平均值都不大于

$$\frac{1}{t}\int_0^t g(u)du.$$

如果我们把这一论证应用于函数 g，其在 $u\geqslant 0$ 处之值为 $f^*(u)$，于是我们得到，对一切 $t>0$，

$$m_g(t)=m_{f^*}(t)=m(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du.$$

显然，从 f^* 的非增性可知，对一切 $t>0$，有 $m(t)\geqslant f^*(t)$．于是，若我们对 $1\leqslant p<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，定义

$$\|f\|_{pq}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p}m(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

对 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$q=\infty$ 定义

$$\|f\|_{pq}=\sup_{t>0} t^{1/p}m(t),$$

我们定有

(**3.20**) $$\|f\|_{pq}^*\leqslant\|f\|_{pq}.$$

用 $\|\ \ \|_{pq}$ 代替 $\|\ \ \|_{pq}^*$ 的优点之一是 $\|\ \ \|_{pq}$ 为一范数．这是因为从(3.18)立即看出，对每个 $t>0$，映射 $t\to m(t)=m_{f^*}(t)$ 是一个范数．按(3.9)，取 $p=1$，我们就有 $\|f\|_{1\infty}=\|f\|_1$；另一方面，通过简单的计算表明，满足 $\|f\|_{1q}<\infty$，$1\leqslant q<\infty$ 的函数 f 必定几乎处处为 0．然而，当 $1<p\leqslant\infty$ 时，$\|\ \ \|_{pq}$ 是"等价"于 $\|\ \ \|_{pq}^*$ 的．更确切地说，我们有以下结论[11]：

定理 3.21 若 $f\in L(p, q)$，$1<p\leqslant\infty$，则

$$\|f\|_{pq}^*\leqslant\|f\|_{pq}\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_{pq}^*.$$

证明 第一个不等式就是不等式(3.20)，因而业已证明．当 $1<p<\infty$，$1\leqslant q<\infty$ 时，第二个不等式可从定理 3.14 之(i)推出：

---

11) 重要的是 $\|\ \ \|_{pq}^*$ 和 $\|\ \ \|_{pq}$ 两者都加以应用，因为它们各自有其优点．$\|\ \ \|_{pq}$ 是范数这一优点往往因 $\|\ \ \|_{pq}^*$ 更易掌握而被抵消．此外，如同我们刚才所看到的，不能用 $\|\ \ \|_{1q}$ 来定义 L^1 的一个满意的扩展．

$$\|f\|_{pq}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty\left[\int_0^t f^*(u)du\right]^q t^{-q(1-1/p)-1}dt\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty[uf^*(u)]^q u^{-q(1-1/p)-1}du\right)^{1/q}$$

$$=\frac{p}{p-1}\|f\|_{pq}^*.$$

对于余下的 $1<p\leqslant\infty$, $q=\infty$ 的情形，我们有

$$t^{1/p}m(t)=t^{(1/p)-1}\int_0^t f^*(u)du=t^{(1/p)-1}\int_0^t u^{-1/p}u^{1/p}f^*(u)du$$

$$\leqslant\|f\|_{p\infty}^* t^{(1/p)-1}\int_0^t u^{-1/p}du=\frac{p}{p-1}\|f\|_{p\infty}^*.$$ 】

定理 3.22 具有范数 $\|\ \|_{pq}$ 的 $L(p, q)$, $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 是一 Banach 空间.

证明 我们需要证明 $L(p, q)$ 是完备的. 当 $p=\infty$ 时，我们只对 $q=\infty$ 定义了 $L(p, q)$. 此时，由于 $L(\infty, \infty)=L^\infty$, 从 L^∞ 的完备性可得定理结论. 所以我们假定 $1<p<\infty$, 并设 $\{f_n\}$ 是 $L(p, q)$ 中的 Cauchy 序列，那么，依定理 3.12、定理 3.11 之 (i) 和引理 3.8, 我们就有

$$\sup_{s>0} s^p\mu(\{x\in M: |f_n(x)-f_m(x)|>s\})\to 0,$$
$$\text{当}\quad n, m\to\infty.$$

特别地，序列 $\{f_n\}$ 是依测度收敛的基本列，所以，存在一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 和函数 f, 使 $f_{n_k}(x)\to f(x)$ 几乎处处成立. 给定 $\delta>0$, 则存在 $j_0=j_0(\delta)$, 使得当 $j, n\geqslant j_0$ 时，$\|f_n-f_j\|_{pq}<\delta$. 令 $g_k=f_{n_k}-f_j$, $g=f-f_j$, 由 Fatou 引理知

$$\int_E|g|d\mu\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_E|g_k|d\mu$$

对任一可测集 E 成立. 由 (3.18) 且再应用 Fatou 引理得知，对 $j\geqslant j_0$, 有

$$\|f-f_j\|_{pq}=\|g\|_{pq}\leqslant\delta.$$

这就证明了定理. 还可证明，当 $p=1$, $1<q\leqslant\infty$ 时，$L(p, q)$ 不能赋范，见下面 5.12 所述. 】

§ 4 解析算子族的插值

本节我们将 M. Riesz 凸性定理推广到随脚标 p, q 充分光滑变化的插值算子的情况．我们假定带域 $S=\{z\in \boldsymbol{C};\ 0\leqslant \text{Re } z\leqslant 1\}$ 中的每个 z，有一个线性算子 T_z，其定义域为 $L^1(M)$ 中的简单函数空间，其值域为 N 上的可测函数，使当 f 是 $L^1(M)$ 中的简单函数，g 是 $L^1(N)$ 中的简单函数时，$(T_z f)g$ 在 N 上是可积的．如果映射

$$z\to \int_N (T_z f)g d\nu$$

在 S 内部解析、在 S 上连续，并存在常数 $a<\pi$，使得

$$e^{-a|y|}\log\left|\int_N (T_z f)\, g d\nu\right|$$

$(z=x+iy)$ 在带域 S 中是一致上有界的，则我们称算子族 $\{T_z\}$ 是容许的．

那么定理 1.3 推广如下：

定理 4.1 设 $\{T_z\}$ $(z\in S)$ 是容许的线性算子族，它对一切 $L^1(M, m, \mu)$ 中之简单函数 f 满足

$$\|T_{iy}f\|_{q_0}\leqslant M_0(y)\|f\|_{p_0},\quad \|T_{1+iy}f\|_{q_1}\leqslant M_1(y)\|f\|_{p_1},$$

其中，$1\leqslant p_j,\ q_j\leqslant\infty$，$M_j(y)\,(j=0,\ 1)$ 不依赖于 f，且对某 $b<\pi$，满足

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-b|y|}\log M_j(y)<\infty,$$

则当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，存在常数 M_t，使得对一切简单函数 f，倘若

$$1/p_t=(1-t)/p_0+t/p_1 \quad 和 \quad 1/q_t=(1-t)/q_0+t/q_1,$$

就满足

$$\|T_t f\|_{q_t}\leqslant M_t\|f\|_{p_t}.$$

只要证明三线定理（引理 1.4）的下述推广，本定理的证明就非常类似于 M. Riesz 凸性定理的证明．

引理4.2 设 F 是 S 上的连续函数，它在 S 内部解析，且对某 $a<\pi$ 满足

$$(4.3)\qquad \sup_{0<x<1,-\infty<y<\infty} e^{-a|y|}\log|F(x+iy)|<\infty,$$

则当 $0<x<1$ 时，

$$(4.4)\qquad \log|F(x)|\leqslant\frac{1}{2}\sin\pi x \times\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log|F(iy)|}{\cosh\pi y-\cos\pi x}+\frac{\log|F(1+iy)|}{\cosh\pi y+\cos\pi x}\right\}dy.$$

证明 对于 $\zeta\in D=\{z\in C: |z|\leqslant1\}$，$\zeta\neq1,\ -1$，令

$$h(\zeta)=(1/\pi i)\log i(1+\zeta)/(1-\zeta).$$

函数 h 可看成是两个保形映射的复合，一个是从单位闭圆盘 D 除去点 1 和 -1 到上半平面 $\{w\in C: w\neq0,\ \mathrm{Im}w\geqslant0\}$ 的保形映射

$$\zeta\to w=i(1+\zeta)/(1-\zeta),$$

另一个是由该上半平面到 S 上的保形映射 $w\to z=(\log w)/\pi i$. 这样，h 就把 $D-\{1,\ -1\}$ 保形地映到 S 上. 而且，对于 $z\in S$，

$$\zeta=h^{-1}(z)=\frac{e^{\pi iz}-i}{e^{\pi iz}+i}.$$

如果对于 $\zeta\in D-\{1,\ -1\}$，定义 $G(\zeta)=F(h(\zeta))$，就得到单位开圆盘上的解析函数，它在除 1 和 -1 点外的闭单位圆盘上连续. 如果 $0\leqslant\rho<R<1$，则应用 Poisson-Jensen 公式得出，对于 $\zeta=\rho e^{i\theta}$，

$$(4.5)\qquad \log|G(\zeta)| \leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(Re^{i\varphi})|d\varphi.$$

将(4.3)用 G 和 $\eta=h^{-1}(x+iy)$ 表示，就可推出，对某个不依赖于 $\eta\in D$ 的常数 A，有

$$\log|G(\eta)|\leqslant A\{|1+\eta|^{-(a/\pi)}+|1-\eta|^{-(a/\pi)}\}.$$

取 $\eta=Re^{i\varphi}$，因 $a/\pi<1$，故由此不等式知，可以对(4.5)中的积分应用 Lebesgue 控制收敛定理，再令 R 趋于 1，就看出当 $\zeta=\rho e^{i\theta}$，$\rho<1$ 时，

$$(4.6)\qquad \log|G(\zeta)|\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|d\varphi.$$

现在我们可以说，从 (4.6) 利用变量代换就能得到所要的不等式 (4.4). 首先我们注意到，条件 $0<x=h(\rho e^{i\theta})<1$ 很容易转换成加在 ρ 和 θ 上的条件，因为这时我们必定有

$$\rho e^{i\theta}=h^{-1}(x)=\frac{e^{\pi ix}-i}{e^{\pi ix}+i}=-i\,\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}$$
$$=\left\{\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}\right\}e^{-i(\pi/2)},$$

因而，当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$\rho=(\cos\pi x)/(1+\sin\pi x)\quad 和\quad \theta=-(\pi/2),$$

而当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，有

$$\rho=-(\cos\pi x)/(1+\sin\pi x)\quad 和\quad \theta=\pi/2.$$

在第一种情形中，我们有

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\varphi+\pi/2)+\rho^2}$$
$$=\frac{1-\rho^2}{1+2\rho\sin\varphi+\rho^2}$$
$$=\frac{\sin\pi x}{1+\cos\pi x\sin\varphi};$$

而且，当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，这一等式也成立. 因为我们可以从

$$e^{i\varphi}=h^{-1}(iy)=(e^{-\pi y}-i)/(e^{-\pi y}+i)$$

看出，当 φ 从 $-\pi$ 到 0 取值时，y 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 取值. 此外，

$$\sin\varphi=-1/(\cosh\pi y),\ d\varphi=-[\pi/\cosh\pi y]dy.$$

所以我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{\cosh\pi y-\cos\pi x}\log|F(iy)|dy.$$

类似地，当 φ 从 0 到 π 取值时，$h(e^{i\varphi})$ 描出点 $1+iy,\ -\infty<y<\infty$，并且得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\pi x}{\cosh\pi y+\cos\pi x}\log|F(1+iy)|dy.$$

引理得证．】

在说明如何用(4.2)证明定理 4.1 以前，我们先做一些考察．首先，我们指出，引理 4.2 实际上是三线定理的推广．我们有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\pi x}{\cosh\pi y+\cos\pi y}dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\tan(\pi/2)x}{(1+\tan^2(\pi/2)x\tanh^2(\pi/2)y)\cosh^2(\pi/2)y}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\tan(\pi/2)x}{1+s^2\tan^2(\pi/2)x}ds$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\tan(\pi/2)x}{1+s^2\tan^2(\pi/2)x}ds=\frac{2}{\pi}\int_0^{\tan(\pi/2)x}\frac{du}{1+u^2}$$
$$=\frac{2}{\pi}\arctan(\tan(\pi/2)x)=x.$$

由于 $\sin\pi(1-x)=\sin\pi x,\ \cos\pi(1-x)=-\cos\pi x$，我们还有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\pi x}{\cosh\pi y-\cos\pi x}dy=1-x.$$

因而，假如用条件 $|F(iy)|\leqslant m_0,\ |F(1+iy)|\leqslant m_1$ 以及 $|F|$ 在 S 中一致有界来代替条件(4.3)，从我们刚才推出的等式和(4.4)，可以得到 $|F(x+iy)|\leqslant m_0^{1-x}m_1^x$．这就是说三线定理（引理 1.4）是引理 4.2 的特殊情形．

依(4.2)的证明，显然不等式(4.4)右端的积分是在单位圆上相应的 Poisson 积分的“保形映象”．事实上，对(4.2)的论证稍做变动，就给出下述带域 Dirichlet 问题的解：设 f 定义在垂直线 $x=0$ 和 $x=1$ 上，使对某 $a<\pi$，$e^{-ay}f(y)$ 和 $e^{-ay}f(1+iy)$ 有界，那么，在 S 内部，

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}\sin\pi x$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{f(iy)}{\cosh\pi y-\cos\pi x}+\frac{f(1+iy)}{\cosh\pi y+\cos\pi x}\right\}dy$$

定义了一个有(非切向)边界值 f 的调和函数. 条件

$$e^{-c|y|}f(y)=O(1)\quad 和\quad e^{-c|y|}f(1+iy)=O(1)$$

蕴含了上述积分的存在性(也就阐明了条件(4.3)的作用).

我们现在来证明定理 4.1. 令 $f\in L^1(M)$ 和 $g\in L^1(N)$ 是简单函数,且满足

$$\|f\|_p=1=\|g\|_{q'},$$

其中 $p=p_t,\ q=q_t,\ 1/q+1/q'=1$. 设

$$f=\sum_{j=1}^{m}a_j\chi_{E_j},\quad g=\sum_{k=1}^{n}b_k\chi_{F_k}.$$

利用证明 M. Riesz 凸性定理(定理 1.3)时引入的同样记号, 我们构造函数

$$F(z)=\int_N(T_zf_z)g_zd\nu=\sum_{j,k}^{m,n}|a_j|^{\alpha(z)/\alpha}|b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}\gamma_{jk}(z),$$

此处, $\gamma_{jk}(z)=e^{i(\theta_j+\varphi_k)}\int_N(T_z\chi_{E_j})\chi_{F_k}d\nu$. 由 $\{T_z\}$ 是容许族的假定可推出 F 满足引理 4.2 的假设, 而且, 由于

$$|f_{iy}|^{p_0}=|f|^p=|f_{1+iy}|^{p_1},\quad |g_{iy}|^{q_0'}=|g|^{q'}=|g_{1+iy}|^{q_1'},$$

应用 Hölder 不等式就得 $|F(iy)|\leqslant M_0(y)$, $|F(1+iy)|\leqslant M_1(y)$. 于是根据引理 4.2, 有

$$\left|\int_N(T_tf)gd\nu\right|=|F(t)|$$

$$\leqslant\exp\left[\frac{1}{2}\sin\pi t\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log M_0(y)}{\cosh\pi y-\cos\pi t}+\frac{\log M_1(y)}{\cosh\pi y+\cos\pi t}\right\}dy\right]=M_t.$$

又因 $\|T_tf\|_{p_t}=\sup\limits_{\|g\|_{q_t'}=1}\left|\int_N(T_tf)gd\nu\right|$, 于是定理得证. 】

§5 进一步的结果

5.1 线性算子的插值理论已经以很多种方式推广到一般的 Banach 空间，这些推广可以按下述方式叙述：设 V 是拓扑向量空间，A^0、A^1 是两个以 $\|\ \|_0$ 和 $\|\ \|_1$ 为范数的 Banach 空间，它们连续地嵌入 V. 我们可以在 $A^0\cap A^1$ 中引入范数 $\|a\|_{A^0\cap A^1}=\max\{\|a\|_0,\ \|a\|_1\}$，在 $A^0+A^1=\{a=a_0+a_1: a_0\in A^0,\ a_1\in A^1\}$ 中引入范数 $\|a\|_{A^0+A^1}=\inf\{\|a_0\|_0+\|a_1\|_1: a_0\in A^0,\ a_1\in A^1,\ a_0+a_1=a\}$，而把 $A^0\cap A^1$ 和 A^0+A^1 转换为 Banach 空间. A^0 与 A^1 间的中间空间指的是满足 $A^0\cap A^1\subset A\subset A^0+A^1$ 的任一 Banach 空间 A. 如当 $A^0=L^{p_0}$，$A^1=L^{p_1}$，$1\leqslant p_0,\ p_1\leqslant\infty$，$1/p_t=(1-t)/p_0+t/p_1$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 L^{p_t} 是一个在 L^{p_0} 和 L^{p_1} 之间的中间空间. 假设 T 表示 A^0+A^1 到自身的线性变换，并具性质：T 在 $A_j(j=0,\ 1)$ 的限制是 A_j 到自身的有界算子，而中间空间 A 对每个这种线性变换 T 都是不变的. 此外，若任一这种 T 在 A 上的限制也是有界算子，则我们称 A 是 A^0 和 A^1 间的线性插值空间. 从 M. Riesz 凸性定理得知，L^{p_t} 是 L^{p_0} 和 L^{p_1} 间的线性插值空间.

于是，我们可以把线性算子插值的抽象理论中的一般问题用下述方式表述：

（i）给定两个 Banach 空间 A^0，A^1，如何表征"一切"A^0 与 A^1 间的线性插值空间？

（ii）如何在给定的 Banach 空间 A^0 和 A^1 之间构造线性插值空间？

（iii）设 A 是 A^0 和 A^1 间的线性插值空间. 若 B^0 和 B^1 是另两个 Banach 空间，是否存在线性插值空间 B（在 B^0 和 B^1 之间），使 A^0+A^1 到 B^0+B^1 的每个线性变换——其在 A^j 上的限制是将 A^j 映入 $B^j(j=0,\ 1)$ 的连续映射——连续地把 A 映入 B？

（iv）设 A 是由 A^0 和 A^1 以某种特定的方式构造出来的线性插值空间，B 是从另外两个 Banach 空间 B^0 和 B^1 以"同样"的方

式得到的空间．是否每个从 A^0+A^1 到 B^0+B^1 的线性变换——它把 A^j 连续地映入 B^j, $j=0$, 1——也把 A 连续地映入 B?

Gagliardo 已经回答了第一个问题(见[1])．此外，Gagliardo 的方法使他能够对(iii)有一个肯定的回答．这些结果太一般，并不象由 Lions[1], Calderón[2], Lions 和 Peetre[1] 得到的两个插值构造定理(即回答(ii)和(iv))那样与本章内容有密切联系．下面几段将用于叙述这些插值方法．

5.2 我们首先叙述 Calderón 给出的*复插值方法*． 设 B 是一个 Banach 空间, D 是复平面上的一个区域．从 D 到 B 的映射 $z\to b(z)$ 称为是*解析的*， 如果对 B 上的每一连续线性泛函 l, $z\to l[b(z)]$ 是 D 上的复值解析函数．我们引入一个辅助空间 $\mathscr{F}(A^0, A^1)$, 它由定义在带域 $S=\{z\in \boldsymbol{C}: 0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1\}$ 上而在 A^0+A^1 中取值的函数 f 组成, 这些 f 满足:

(1) f 在 S 的内部 $S^0=\{z\in \boldsymbol{C}: 0<\operatorname{Re} z<1\}$ 解析;

(2) 在 S 上, f 连续, 且 $\|f\|_{A^0+A^1}$ 有界;

(3) 对于 $-\infty<t<\infty, f(it)\in A^0, t\to f(it)$ 作为由 $(-\infty, \infty)$ 到 A^0 的函数是连续的, 且 $t\to\|f(it)\|_0$ 有界;

(4) 对于 $-\infty<t<\infty$, $f(1+it)\in A^1$, 且 $t\to f(1+it)$ 作为由 $(-\infty, \infty)$ 到 A^1 的函数是连续的, 且 $t\to\|f(1+it)\|_1$ 有界.

如果我们引进范数 $\|f\|_{\mathscr{F}}=\|f\|_{\mathscr{F}(A^0,A^1)}=\max\{\sup\limits_t\|f(it)\|_0, \sup\limits_t\|f(1+it)\|_1\}$, 则 $\mathscr{F}(A^0, A^1)$ 是 Banach 空间．假定 $0\leqslant t\leqslant 1$, $N_t=\{f\in\mathscr{F}: f(t)=0\}$, 定义空间 A_t 为 $\mathscr{F}/N_t$．那么可以认为 A_t 等同于由一切 $f\in\mathscr{F}$ 且 $f(t)\in A^0+A^1$ 组成的线性空间．若对 A_t 引入通常商空间的范数 $\|a\|_{A_t}=\inf\{\|f\|_{\mathscr{F}}: f\in\mathscr{F}, f(t)=a\}$, $a\in A_t$, 则得到一个 Banach 空间．我们要假定 $\{0\}\neq A^0\cap A^1$.

显然, A_t 是 A^0 和 A^1 的中间空间．而且可以证明, A_t 是 A^0 和 A^1 间的线性插值空间．实际上, 对于上面提出的问题(iv), 我们得到以下答案:

如果 B^0 和 B^1 是两个 Banach 空间, T 是从 A^0+A^1 映入 B^0

$+B^1$ 的线性变换，它把 A^j 映入 B^j, $j=0, 1$, 而且对一切 $a\in A^j$, $\|Ta\|_j\leqslant M_j\|a\|_j$. 则 T 把 A_t 映入 B_t, 且对一切 $a\in A_t$, 有 $\|Ta\|_{B_t}\leqslant M_0^{(1-t)}M_1^t\|a\|_{A_t}$.

Calderón 给出了 A^0 与 A^1 间的线性插值空间的另一种(但有联系的)构造法，由此导出问题(iv)的另一种解答. 但是无论应用哪一种结果，我们都会得出与已经得到的线性插值空间等同的空间. 为了更好地理解这一新问题的意义，我们给出线性算子的插值的一些基本例子(大部份是在这一般理论出现之前就有了的).

5.3 设$(M, \mathscr{M}, \mu)$是一测度空间，$A^j=L^{p_j}(M)$, $1\leqslant p_j\leqslant\infty$, $j=0, 1$. 我们可以不妨把 A^0, A^1 嵌入局部可积函数空间 V. 则当 $p_t<\infty$ 时，存在 A_t 和 $L^{p_t}(M)$之间的一个保范同构，其中 $1/p_t=(1-t)/p_0+t/p_1$. 当 $p_t=\infty$ 时，p_t 必是 p_0 或 p_1 之一. 假定 $p_t=p_0$, $p_1<\infty$. 一般说来，这时我们得不到 A_0 和 $A^0=L^\infty(M)$ 间的保范同构. 但是可以证明，对一切 $\alpha>0$, 使 $\mu(\{x\in M: |f(x)|>\alpha\})<\infty$ 的函数 $f\in L^\infty(M)$的集合之按 L^∞ 范数的闭包与 A_0 等同. 如果$(N, \mathscr{N}, \nu)$是另一测度空间，$B^0=L^{q_0}(N)$, $B^1=L^{q_1}(N)$, 则 5.2 中之定理讲的就是 M. Riesz 凸性定理(1.3).

5.4 设$(M, \mathscr{M}, \mu)$是一测度空间，$\mu_j(j=0, 1)$是定义在 $\mathscr{M}$ 上的关于 μ 绝对连续的测度. 若 $A^j=L^{p_j}(M, \mu_j)$, 则存在 A_t 和 $L^{p_t}(M, \mu_t)$间的一个保范同构，其中，$0<1/p_t=(1-t)/p_0+t/p_1$, $d\mu_t=\alpha_0^{1-t}\alpha_1^t d\mu$, $0\leqslant t\leqslant 1$ (α_j 是 μ_j 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数，$j=0, 1$). 在 $p_t=\infty$ 时，我们必须对 5.3 中的论述加以修改. 可参看 Stein 和 G. Weiss[5].

5.5 对 $p\geqslant 1$, 设 H^p 是一切在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 解析且满足

$$\|F\|_p=\sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}<\infty$$

的函数 $F(z)$的空间. 这是一个与以正实轴为基的管相关的 H^p 空间(见第三章). 如果 $A^j=H^{p_j}$, $1\leqslant p_j<\infty$, 则 $A_t(0\leqslant t\leqslant 1)$等价于 H^{p_t}(即存在一个 A_t 到 H^{p_t} 上的可逆线性映射). (参看 Salem 和 Zygmund[1], Calderón 和 Zygmund[2], G. Weiss[1].)两个与

离维管相关的 H^p 空间之间的线性插值空间的等同性是个尚未解决的问题. 这一点也可用于下一章所讨论的共轭调和函数系的 H^p 空间上.

5.6 设 $0<\alpha<2$, 我们考虑由 E_n 上连续有界且满足

$$\sup_x |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| = o(|t|^\alpha), \quad |t|\to 0$$

的函数构成的空间 $\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(E_n)$. 这是一个具有范数

$$\|f\|^{(\alpha)} = \|f\|_\infty + \sup_{x,t}\{|t|^{-\alpha}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\}$$

的 Banach 空间. 对于一般的 $\alpha>0$, 设 k 是严格小于 α 的最大整数, 我们定义 λ_α 是所有 C^k 函数的空间, 这些函数满足 $D^\beta f\in\lambda_{\alpha-k}$, $0\leqslant|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n<\alpha$ (我们沿用第一章(1.9)引入的记号) 那么, λ_α是一个具有范数 $\|f\|^{(\alpha)}=\sum_{|\beta|<\alpha}\|D^\beta f\|^{(\alpha-k)}$ 的 Banach 空间. 若 $A^j=\lambda_{\alpha j}$, $j=0$, 1, $\alpha=(1-t)\alpha_0+t\alpha_1$, 则 A_t 等价于 λ_α. (参看 Taibleson[1] 和 Calderón[2].)

5.7 下面的例子是在讨论 E_n 时经常要研究的, 而在描述多重 Fourier 级数时会显得更为简单. 对任一 $\alpha\geqslant 0$, 定义 $L^p_\alpha(T_n)$ 是由函数 $f\in L^p(T_n)$ 组成的空间, 其中 $f(x)\sim\sum_m a_m e^{2\pi i m\cdot x}$, 使得 $a_0+\sum_{m\neq 0}|m|^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是函数 $f^{(\alpha)}\in L^p(T_n)$的 Fourier 级数 (我们用第七章开始时引入的记号). 这个空间是一具有范数 $\|f\|_p^{(\alpha)}=\|f^{(\alpha)}\|_p$ 的 Banach 空间. 假定 $A^j=L^{p_j}_{\alpha_j}$, $1<p_j<\infty$, $j=0$, 1, 则 A_t 等价于 L^p_α, 其中 $1/p=(1-t)/p_0+t/p_1$, $\alpha=(1-t)\alpha_0+t\alpha_1$. 这一事实的证明利用了定理 (4.1) 和 $f\to\sum_m|m|^{-i\gamma}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是 $L^p(T^n)$ 上的有界算子, 这里 $1<p<\infty$, γ 是实数.

5.8 5.3或本章§1中所述的 M. Riesz 古典插值定理, 可以推广到定义在测度空间而取值于 Banach 空间的函数空间. 其详细论述可参看 Calderón[2]. 至于其特殊情形——函数值是 L^q 空间本身则早由 Boas 和 Bochner[1] 及 Benedeck 和 Panzone[1] 得到. M. Riesz 古典插值定理也可以推广到 Banach 格上(即 Banach 函数空间, 使由 $|f|\leqslant|g|$ 推得 $\|f\|\leqslant\|g\|$. 更明确的论述可参看

Calderón[2]). 这个推广包含了 M. Riesz 定理和 5.4 中所述的例子，以及 § 3 中定义的 $L(p, q)$ 空间的插值定理.

5.9 5.1 中所说的由 Gagliardo, Lions 和 Peetre 给出的插值构造理论，可以如下叙述，按照 5.1 中引进的符号对每个 $t>0$，我们在 A^0+A^1 上定义范数 $K_a(t)=\inf\{\|a_0\|_0+t\|a_1\|_1:\ a_0+a_1=a,\ a_0\in A^0,\ a_1\in A^1\}$. 由此定义立即可得 K_a 在正实数上是非负凹函数. 现假定 Φ 是 $(0, \infty)$ 上一切非负 Lebesgue 可测函数集上的非负(可能无穷取值)函数，满足

(i) $\Phi(h)=0$，当且仅当 $h(t)=0$ 几乎处处成立；

(ii) 若 $\Phi(h)<\infty$，则 $h(t)<\infty$ 几乎处处成立；

(iii) 当 $a>0$ 时，$\Phi(ah)=a\Phi(h)$；

(iv) 若 $h(t)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}h_j(t)$ 几乎处处成立，则 $\Phi(h)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}\Phi(h_j)$. 这样的函数 Φ 叫作函数范数，集合 $A(\Phi)=\{a\in A^0+A^1:\ \Phi(K_a)<\infty\}$ 是 A^0+A^1 的子空间，映射 $a\to\Phi(K_a)$ 是 $A(\Phi)$ 上的范数，记作 $\|a\|_\Phi$. 当 Φ 满足某些一般条件时，空间 $A(\Phi)$ 就是 A^0 和 A^1 间的线性插值空间，而且还可以得到一个插值定理，它是 5.1 中提出的问题 (iv) 的解答：设 T 是从 A^0+A^1 到 B^0+B^1 中的线性变换，它把 A^j 映入 B^j，$j=0, 1$，且对 $a\in A^j$，有 $\|Ta\|_j\leqslant M_j\|a\|_j$，那么，$T$ 把 $A(\Phi)$ 映入 $B(\Phi)$，且存在一个常数 $M=M(\Phi, M_0, M_1)$，使得对一切 $a\in A(\Phi)$，$\|T_a\|_\Phi\leqslant M\|a\|_\Phi$. 在 Φ 满足以下条件时，这一定理的证明格外简单：存在 $(0, \infty)$ 上的一个非负函数 ψ，使 $\Phi(h^\lambda)\leqslant\psi(\lambda)\Phi(h)$，其中 $\lambda>0$，$h^\lambda(t)=h(\lambda t)$. 在这种情形下，我们有 $\|T_a\|_\Phi=\Phi(K_{T_a})\leqslant M_0\Phi(K_a^{M_1/M_0})\leqslant M_0\psi(M_1/M_0)\Phi(K_a)=M_0\psi(M_1/M_0)\|a\|_\Phi$ (第一个不等式是对 T 所加的题设的直接结果，第二个不等式可从加在 Φ 上的新条件得出). 于是得到了插值定理，其中 $M\leqslant M_0\psi(M_1/M_0)$. 举例说，如果 $\psi(\lambda)=\lambda^s$，$0\leqslant s\leqslant1$，我们就有类似的不等式 $M\leqslant M_0^{1-s}M_1^s$.

5.10 当 $A^0=L^1$，$A^1=L^\infty$，$f\in L^1+L^\infty$ 时，我们不难建立 $K_f(t)=\int_0^t f^*(u)du$. 根据后面的讨论看出，我们只需考虑 $f\geqslant0$ 的

情形.这时,$K_f(t)=\inf\{\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}: f=f_0+f_1, f_j\geqslant 0, f_j\in A^j, j=0,\ 1\}$. 假定 $f=f_0+f_1$, 则 $|f|=(\operatorname{sgn}\bar{f})f=(\operatorname{sgn}\bar{f})f_0+(\operatorname{sgn}\bar{f})f_1=g_0+g_1$; 类似地, 若 $|f|=g_0+g_1$, 则 $f=(\operatorname{sgn}f)g_0+(\operatorname{sgn}f)g_1=f_0+f_1$. 无论是哪种情况, 都有 $\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}=\|g_0\|_{L^1}+t\|g_1\|_{L^\infty}$, 并因而有 $K_f=K_{|f|}$. 当 f 是实值的且 $f=f_0+f_1$ 时,则 $f=\operatorname{Re}f_0+\operatorname{Re}f_1$, 因而在估计 K_f 时, 只需考虑实值的 f_0 和 f_1 即可.最后,若 $f\geqslant 0$, 且 $f=f_0+f_1$, 我们令 $f_0'=\inf\{f_0^+, f\}$, $f_1'=f-f_0'$. 那么 $f=f_0'+f_1'$, $0\leqslant f_0'\leqslant f_0^+\leqslant|f_0|$, 且 $0\leqslant f_1'=f-f_0'\leqslant|f-f_0|=|f_1|$. 于是 $\|f_0'\|_{L^1}+t\|f_1'\|_{L^\infty}\leqslant\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}$. 所以我们可以假定 $f=f_0+f_1$,其中三个函数都是非负的.如果 $s=\|f_1\|_{L^\infty}$, 我们定义 $f^{(s)}=f\wedge s=\inf\{f,\ s\}$, $g=f-f^{(s)}$. 那么,(如果必要的话) 在零测度集上改变 f_1 的值, 我们能够假定 $0\leqslant f_1(x)\leqslant s$ 对一切 x 成立. 由于 $f_1\leqslant f$, 从而 $f_1\leqslant f^{(s)}$, 因此, $g=f-f^{(s)}\leqslant f-f_1=f_0$. 这就表明, $\|g\|_{L^1}+t\|f^{(s)}\|_{L^\infty}=\|g\|_{L^1}+st\leqslant\|f_0\|_{L^1}+st\leqslant\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}$.所以,对于 $f\geqslant 0$, 有 $K_f(t)=\inf\limits_{s\geqslant 0}\{\|f-f^{(s)}\|_{L^1}+ts: f^{(s)}=f\wedge s\}$.若 λ 表示 f 的分布函数,且 $s_0=\inf\{s:\lambda(s)<t\}$,我们来证明 $K_f(t)=\|f-f^{(s_0)}\|_{L^1}+ts_0$.首先,我们假定 $s_1>s_0$.那么,当 $f(x)\leqslant s_0$ 时,$f^{(s_1)}(x)-f^{(s_0)}(x)$ 等于 0; 当 $s_0<f(x)\leqslant s_1$ 时,$f^{(s_1)}(x)-f^{(s_0)}(x)$ 等于 $f(x)-s_0$,而当 $s_1<f(x)$ 时, $f^{(s_1)}(x)-f^{(s_0)}(x)$ 取值 s_1-s_0. 这样,由于 $\lambda(s_0)\leqslant t$,故有

$$\begin{aligned}
&\|f-f^{(s_1)}\|_{L^1}+ts_1-(\|f-f^{(s_0)}\|_{L^1}+ts_0)\\
&\quad=t(s_1-s_0)-\int(f^{(s_1)}-f^{(s_0)})d\mu\\
&\quad\geqslant\lambda(s_0)(s_1-s_0)-\int_{f(x)>s_0}(f^{(s_1)}-f^{(s_0)})d\mu\\
&\quad\geqslant\lambda(s_0)(s_1-s_0)-\lambda(s_0)(s_1-s_0)=0.
\end{aligned}$$

现在设 $s_1<s_0$, 且 $s_1\leqslant s<s_0$,对该区间中之 s, $\lambda(s)\geqslant t$, 所以我们有

$$\begin{aligned}
&\|f-f^{(s_1)}\|_{L^1}+ts_1-(\|f-f^{(s)}\|_{L^1}+st)\\
&\quad\geqslant\int_{f(x)>s_1}(f^{(s)}-f^{(s_1)})d\mu-\lambda(s)(s-s_1)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \int_{f(x)>s} (s-s_1)\,d\mu - \lambda(s)(s-s_1) = 0.$$

根据连续性，不等式 $\|f-f^{(s_1)}\|_{L^1}+ts_1>\|f-f^{(s)}\|_{L^1}+ts$ 必定对 $s=s_0$ 成立，并且证明了 $K_f(t)=\|f-f^{(s_0)}\|_{L^1}+ts_0$. 按照 f^* 的定义，便知当 $\lambda(s_0)\leqslant u<t$ 时，$f^*(u)=s_0$. 这一结果连同引理 3.17 之 (ii)，便得到

$$K_f(t)=\int (f-f^{(s_0)})\,d\mu+ts_0=\int_{f(x)>s_0} f\,d\mu-s_0\lambda(s_0)+ts_0$$

$$=\int_0^{\lambda(s_0)} f^*(u)\,du+\int_{\lambda(s_0)}^t f^*(u)\,du=\int_0^t f^*(u)\,du.$$

如果我们选取函数范数为

$$\Phi(h)=\left((q/p)\int_0^\infty (t^{(1/p)-1}h(t))^q\,(dt/t)\right)^{1/q},$$

我们就会看出，5.9 中所定义的空间 $A(\Phi)$ 就是空间 $L(p, q)$, $1<p\leqslant\infty$，其范数就等于 $\|\ \ \|_{pq}$.

5.11 我们曾在本章第 1 节中，利用单位正方形 $Q=\{(\alpha,\beta);\ 0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1\}$ 中的点，给出 M. Riesz 凸性定理的一个几何解释. 我们可以给 Marcinkiewicz 定理(2.4)一个类似的解释，然而这时只涉及"下三角形"$\{(\alpha,\beta)\in Q;\alpha\geqslant\beta\}$ 中的点. 我们可以举例说明，这个定理在"上三角形"中是不成立的(见 Hunt[1]). M. Riesz 在他的文章[2]中指出，仅当所考虑的 L^p 空间由复值函数组成时，凸性定理才对整个单位正方形 Q 成立. 而在只考虑实值函数时，M. Riesz 给出一些例子说明凸性结论在"上三角形"中不再成立，而在"下三角形"中成立. 然而从复值的情况立即推知，在定理 1.3 的假定下，存在一个常数 k_t(不一定小于或等于 $k_0^{1-t}k_1^t$)，使得算子 T 是(p_t, q_t)型的，其(p_t, q_t)范数 $\leqslant k_t$. 在这一点上，我们有必要指出，实际上 Fourier 分析中所自然提出的所有算子，对某些指标 $p, q\,(p\leqslant q)$ 而言，都是(p,q)型(或弱(p, q)型)的. 那么，相应于"下三角形"中点的插值结果，对我们的目的来说是足够用了.

5.12 当 $p=1$, $1<q\leqslant\infty$ 时，没有等价于 $\|\ \ \|^*_{p,q}$ 的范数，因而这些空间 $L(p, q)$ 不能赋范. 让我们对 $q=\infty$ 来证明这一点.

我们考虑 E_1 上的函数列 $\{f_k\}$，其中 $f_k(x)=1/|x-k|$. 那么每个 $f_k\in L(1,\infty)$ 以及 $\|f_k\|_{1,\infty}^*$ 与 k 无关. 令 $f=\sum_{k=1}^{N} f_k$. 假如 $\|\ \|$ 是等价于 $\|\ \|_{1,\infty}^*$ 的范数，则必定对某个常数 C_1，有 $\|f\|\leqslant C_1N$. 然而，当 $0\leqslant x\leqslant N$ 时，$f(x)\geqslant C_2\log N$，因而 $\|f\|_{1,\infty}^*\geqslant C_2N\log N$，则当 $N\to\infty$ 时，产生了矛盾. 对于 $1<q<\infty$ 的情况，可类似地证明.

文献注释

Marcinkiewicz 定理首先在[2]中发表，文中对"主对角线"$\{(\alpha,\beta)\in Q;\ \alpha=\beta\}$给出了证明概要. 而对于"下三角形"的证明和许多重要的应用，则首先由 Zygmund[2]发表. 本章给出的 M. Riesz 凸性定理的证明则由 Thorin[1]以及 Tamarkin 和 Zygmund[1]各自独立地得出的. 解析算子族的插值是属于 Stein[2] 的. 用引理 4.2 得到的另一有关结果可在 Hirschman [1] 中找到. 这种类型的插值问题在 H^p 空间上的推广，可参看 Stein 和 G. Weiss[3]. $L(p,q)$空间是由 Lorentz[2]引入的. Calderón 第一个利用函数 m_f^*，并指出如何用它引入 $L(p,q)$上的范数. 对于这些空间的一般理论，参看 Hunt[1]和 Oklander[1]. 由之得出插值定理 3.15 的一些结果的论述，是依照 Hunt [1] 改写的. 一些有关的结果可参看 Stein 和 G. Weiss [2]，Krein 和 Semenov[1]，Calderón[2] 以及 Lions 和 Peetre[1]. 叙述各种一般的插值方法并指出它们之间联系的两篇文章是 Krein 和 Petunin[1] 以及 Magenes [1]. Hilbert 变换的弱型不等式则要回朔到 Kolmogorov [1]，Besicovitch[1] 和 Titchmarsh[1].

第六章　奇异积分和共轭调和函数系

我们已经在第三章和第五章中遇到过 Hilbert 变换了. 在那两章中，都是用单复变函数论来导出它的性质的. 在本章第1节，我们要建立部份实变方法来研究 Hilbert 变换. 在第2节中我们将说明如何用这些结果来定义和建立具有奇核的奇异积分算子类的基本性质. 第3节将介绍一个更大的奇异积分算子类. 最后，我们在第4节中指出，许多这种积分算子都是与偏微分方程组(它们推广了 Cauchy-Riemann 方程)相联系的. 这些偏微分方程组还使我们能够考虑多变量 Fourier 分析的另一种复合型方法. 特别地，我们将引入 H^p 空间的理论，在某种意义上，它与第三章所介绍的 H^p 理论相平行.

§1　Hilbert　变　换

在第五章第2节中，我们引入了函数 $f\in L^p(-\infty,\infty)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 的 Hilbert 变换 $\tilde{f}$，将它定义为当 $y>0$ 趋向0时

$$v(x,y)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,[t/(t^2+y^2)]\,dt$$

的极限. 我们利用解析函数的性质曾证明，对几乎一切 x，这个极限存在. 鉴于这一事实，我们自然会问，$\tilde{f}$ 是否能直接定义为

$$\tilde{f}(x)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-t)/t]\,dt.$$

遗憾的是，既使对非常光滑的 $f\in L^p(-\infty,\infty)$，这个积分也不一定有意义. 但是如果我们在主值意义下考虑这个积分(见第四章(4.4))，则对几乎每个实数 x，可得

(1.1)
$$\tilde{f}(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\int_{0<\varepsilon\leqslant|t|}\frac{f(x-t)}{t}\,dt.$$

这是第五章引理2.6和下述事实的直接推论:

引理 1.2 设 $f\in L^p(-\infty,\infty)$，$1\leqslant p<\infty$，则在 f 的 Lebesgue 点集的每个点 x 处，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt-\int_{0<\varepsilon<|t|}\frac{f(x-t)}{t}dt\right\}=0.$$

证明 令

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t^2+1}-\dfrac{1}{t}, & \text{当}\ |t|\geqslant 1;\\ \dfrac{t}{t^2+1}, & \text{当}\ |t|<1,\end{cases}$$

并对 $\varepsilon>0$，令 $\varphi_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\varphi(t/\varepsilon)$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt-\int_{0<\varepsilon\leqslant|t|}\frac{f(x-t)}{t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

由于

$$(1.3)\qquad \psi(x)=\sup_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(x)|=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|(1+x^2)}, & \text{当}\ |x|\geqslant 1;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当}\ |x|<1,\end{cases}$$

故 $\psi(x)\in L^1(-\infty,\infty)$. 于是根据第一章定理 1.25 和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=0$$

(因 φ 是奇函数)，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt=f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=0,$$

引理得证. 】

在前一章我们曾证明，当 $1<p<\infty$ 时，Hilbert 变换是 (p,p) 型的. 我们将证明，极大 Hilbert 变换 $\left(\text{对于}\ f\in L^p(-\infty,\infty)，\text{对应函数为}\ \sup\limits_{\varepsilon>0}\dfrac{1}{\pi}\left|\int_{|t|>\varepsilon}f(x-t)\dfrac{dt}{t}\right|\right)$ 也是 (p,p) 型的. 更明确地说，我们有以下结论：

定理 1.4 若 $f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, 则

$$(Mf)(x)=\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\pi}\left|\int_{|t|>\varepsilon}f(x-t)\frac{dt}{t}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\|\psi\|_1 m_f(x)+m_{\tilde f}(x),$$

其中 ψ 是(1.3)中定义的函数, m_f 和 $m_{\tilde f}$ 分别是 f 和 $\tilde f$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数. 特别地, 存在一个不依赖于 $f\in L^p(-\infty,\infty)$ 的常数 B_p, 使

$$\|M_f\|_p\leqslant B_p\|f\|_p.$$

证明 我们有

$$\int_{0<\varepsilon<|t|}\frac{f(x-t)}{t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

因为 ψ 是径向的且非增的函数, 依第二章(3.9)有

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt\right|\leqslant\|\psi\|_1 m_f(x).$$

于是我们只要证明

$$\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt\right|\leqslant m_{\tilde f}(x),$$

定理即可获证. 而这一不等式是第二章定理 3.10 和下面引理所述等式的直接推论:

引理 1.5 若 $f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, $y>0$, 则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\frac{t}{t^2+y^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}dt.$$

证明 等式左端是 f 与第三章(6.13)中引入的共轭 Poisson 核 $Q_y(t)=(1/\pi)[t/(t^2+y^2)]$ 的卷积, 而右端则是 $\tilde f$ 与 Poisson 核

$$P_y(t)=(1/\pi)[y/(t^2+y^2)]$$

的卷积. 由于对每个 $y>0$, Q_y 和 P_y 都属于 $L^{p'}(-\infty,\infty)$, 其中 $(1/p)+(1/p')=1$, 故由 Hölder 不等式和第五章(2.11)推知, 只

需对 f 属于 L^p 的一个稠子集的情况证明引理即可. 所以我们假定 f 属于在第一章中引入的测试函数类 $\mathscr{S}$. 此时, 特别有 $f\in L^2(-\infty,\infty)$. 于是依第五章(2.11), $\tilde{f}$ 也属于 $L^2(-\infty,\infty)$, 且其 Fourier 变换 $(\tilde{f})^\wedge$ 有意义. 我们不难证明

(1.6) $$(\tilde{f})^\wedge(x)=(-i\operatorname{sgn}x)\hat{f}(x)。$$

事实上,我们曾在第三章(6.13)中证明了

$$\hat{Q}_y(x)=(-i\operatorname{sgn}x)e^{-2\pi|yx|}.$$

那么, $(Q_y*f)^\wedge(x)=\hat{Q}_y(x)\hat{f}(x)=(-i\operatorname{sgn}x)e^{-2\pi|yx|}\hat{f}(x)$, 再利用 Plancherel 定理推知, 当 y 趋于 0 时, Q_y*f 趋于(按 L^2 范数)一个函数 g, 其 Fourier 变换为 $(-i\operatorname{sgn}x)\hat{f}(x)$. 另一方面, 我们从第五章引理 2.6 得知, 当 $y\to0$ 时, $(Q_y*f)(x)\to\tilde{f}(x)$ 几乎处处成立. 于是, $\tilde{f}$ 和 g 必定几乎处处相等, (1.6)得证. 为了证明(1.5), 我们只需证明其两端的 Fourier 变换是相等的即可. 根据(1.6)以及第一章定理 1.14, 我们有

$$(\tilde{f}*P_y)^\wedge(x)=(\tilde{f})^\wedge(x)e^{-2\pi|yx|}=(-i\operatorname{sgn}x)\hat{f}(x)e^{-2\pi|yx|}.$$

而刚才我们看到, 最后的表达式等于 $(f*Q_y)^\wedge(x)$. 这就证明了引理, 并因而定理 1.4 得证. 】

我们的目的是把这些结论推广到 n 维情形. 为此, 我们首先要适当地推广 Hilbert 变换. 推广的办法之一是引进核

(1.7) $$K(t)=\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\quad t\neq0,$$

其中, Ω 是一个零阶齐次(即对一切正实数 a, $\Omega(at)=\Omega(t)$)奇函数. 当 $n=1$ 且 $\Omega(t)=(\operatorname{sgn}t)/\pi$ 时, f 和 K 的卷积(主值意义下)产生 f 的 Hilbert 变换. 那么, 鉴于本节所给的结果, 我们自然会问, 算子

(1.8)

$$(Hf)(x)=\lim\int_{\delta>|t|>\varepsilon>0}f(x-t)K(t)dt,\ \varepsilon\to0,\ \delta\to\infty,$$

是否对 $f\in L^p(E_n)$, $1<p<\infty$, 都有意义? 是否有界地把 $L^p(E_n)$

$(1<p<\infty)$空间映入自身[1]？我们将在下一节证明，当 Ω 限制在单位球面 Σ_{n-1} 上是可积函数时 $\left(\text{即当}\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')|dt'<\infty\text{时}\right)$，结论是成立的．这种算子便是具有奇核的奇异积分算子．

如果我们只假定 Ω 在单位球面上的限制是可积的，并且

$$\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')dt'=0$$

（当 Ω 是奇函数时，这个条件当然满足），则我们得到一个更一般的核．在第三节中我们就要讨论这种由 (1.8) 给出的算子，其核 K 具有(1.7)的形式，且 Ω 满足这个更一般的条件．然而研究这些积分算子要比研究具有奇核的奇异积分算子更为复杂．譬如说，为要证明这样的算子是$(p,\ p)$型的，$1<p<\infty$，除 Ω 在 Σ_{n-1} 上的可积性外，我们还必须假定它满足一些别的条件．

§2　具有奇核的奇异积分算子

设 K 是按(1.7)定义的核，Ω 是零阶齐次奇函数，且在 Σ_{n-1} 上可积．首先，对于 $\varepsilon>0$ 以及 $f\in L^p(E_n)$，$1\leqslant p<\infty$，我们有

$$(2.1)\qquad \int_{\delta>|t|>\varepsilon}f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt =\frac{1}{2}\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_{\delta>|r|>\varepsilon}\frac{f(x-rt')}{r}dr\right\}dt'.$$

为了证明这个等式，我们把 t 表成球坐标 $t=rt'$，其中 $|t|=r$，$t'\in\Sigma_{n-1}$．于是我们有

1) 在一维情形时，积分 $\int_{0<\varepsilon<|t|}[f(x-t)/t]\ dt$ 是有意义的，这是因为对于 $f\in L^p(-\infty,\infty)$，$1<p<\infty$，被积函数是 f 的平移（它一定亦属于L^p）与一个L^q函数的乘积（这里$(1/p)+(1/q)=1$），后者在 $|t|\geqslant\varepsilon$ 时，值为 $1/t$，在其它各处值为 0．但是如果我们不考虑(1.8)而考虑积分 $\int_{|t|>\varepsilon>0}f(x-t)K(t)dt$，其可积性并不是显然的．我们可以证明这个积分有意义，但我们这里不去讨论它（关于这个问题以及在下一节中讨论的与该积分有关的一些问题，可参看(5.5)）．我们看到，在下面所述条件的限制下，积分(1.8)对几乎每个 x 绝对收敛．

$$\int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt=\int_\varepsilon^\delta\left\{\int_{\Sigma_{n-1}} f(x-rt')\Omega(t')dt'\right\}\frac{dr}{r}$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^\delta f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'.$$

另一方面，由于 Ω 是奇函数，这后一表达式就等于

$$\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(-t')\left\{-\int_\varepsilon^\delta f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(-t')\left\{\int_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x+rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'.$$

于是，

$$2\int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt=\int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt$$

$$+\int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'$$

$$+\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^\delta f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'$$

$$=\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')\left\{\int_{\delta\geq|r|\geq\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'.$$

则(2.1)得证.

设 $\mathbf{1}=(1, 0, \cdots, 0)\in E_n$ 是 E_n 之标准基的第一个向量，对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E_n$，我们令

$$(H_{\varepsilon,\delta}^{(1)}f)(x)=\int_{\delta\geq|s|\geq\varepsilon} f(x-s\mathbf{1})\frac{ds}{s}$$

$$=\int_{\delta\geq|s|\geq\varepsilon} f(x_1-s, x_2, \cdots, x_n)\frac{ds}{s}.$$

如果 σ 是作用在 E_n 上的旋转群 $SO(n)$ 中的一个元素，则我们设 R_σ 是作用在 E_n 的函数上的算子，定义如下：

$$(R_\sigma f)(x)=f(\sigma x).$$

引理 2.2 若 $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$，则

$$\int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t')}{|t|^n}dt=\frac{1}{2}\int_{SO(n)}(R_{\sigma^{-1}}H_{\varepsilon,\delta}^{(1)}R_\sigma f)\Omega(\sigma\mathbf{1})d\sigma$$

此处,$d\sigma$ 是群 $SO(n)$ 上的 Haar 测度元,并经正规化,使

$$\int_{SO(n)} d\sigma = |\Sigma_{n-1}|$$

是 Σ_{n-1} 的 Lebesgue 测度.

证明 由第一章(4.14),我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_{n-1}} \left\{ \int_{\delta>|r|\geq\varepsilon} \frac{f(x-rt')}{r} dr \right\} \Omega(t') dt' \\
&= \int_{SO(n)} \left\{ \int_{\delta>|r|\geq\varepsilon} \frac{f(x-r\sigma\mathbf{1})}{r} dr \right\} \Omega(\sigma\mathbf{1}) d\sigma \\
&= \int_{SO(n)} \left\{ \int_{\delta>|r|\geq\varepsilon} (R_\sigma f)(\sigma^{-1}x - r\mathbf{1}) \frac{dr}{r} \right\} \Omega(\sigma\mathbf{1}) d\sigma \\
&= \int_{SO(n)} (R_{\sigma^{-1}} H^{(1)}_{\varepsilon,\delta} R_\sigma f)(x) \Omega(\sigma\mathbf{1}) d\sigma.
\end{aligned}$$

于是引理 2.2 是等式(2.1)的直接推论. ■

上述引理的一个直接推论是,当 $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$ 时,

$$\textbf{(2.3)} \qquad 2 \cdot \sup_{\substack{\varepsilon>0 \\ \delta>0}} \left| \int_{\delta\geq|t|\geq\varepsilon} f(x-t) \frac{\Omega(t')}{|t|^n} dt \right| \leqslant \int_{SO(n)} \sup_{\substack{\varepsilon>0 \\ \delta>0}} \left| (R_{\sigma^{-1}} H^{(1)}_{\varepsilon,\delta} R_\sigma f)(x) \Omega(\sigma\mathbf{1}) \right| d\sigma.$$

对于 $g \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$,我们定义 $M_g^{(1)}$.

$$M_g^{(1)}(x) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{|t|<r} |g(x_1 - t, x_2, \cdots, x_n)| dt.$$

在第二章中我们已经看到,根据该章定理 3.7,可知 $M_g^{(1)} \in L^p(E_n)$,且

$$\|M_g^{(1)}\|_p \leqslant b \|g\|_p,$$

其中,$b = b(p, n)$ 只依赖于 p 和 n,而与 g 无关. 而根据定理 1.4,我们又有[2],

---

2) 因为

$$\left| \int_{\delta>|t|\geq\varepsilon} f(x-t)(dt/t) \right| \leqslant \left| \int_{|t|\geq\varepsilon} f(x-t)(dt/t) \right| + \left| \int_{|t|\geq\delta} f(x-t)(dt/t) \right|,$$

从而根据定理 1.4 推出,

$$\sup_{\varepsilon>0,\delta>0} \left| \int_{\delta>|t|\geq\varepsilon} f(x-t)(dt/t) \right| \leqslant 2\|\psi\|_1 m_f(x) + \pi 2 m_{\tilde{f}}(x).$$

$$\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} |(R_{\sigma^{-1}} H_{\varepsilon,\delta}^{(1)} R_\sigma f)(x)|$$

$$\leqslant 2\|\psi\|_1 M_{R_\sigma f}^{(1)}(\sigma^{-1}x) + 2\pi M^{(1)}{}_{H_{\varepsilon,\delta}^{(1)} R_\sigma f}(\sigma^{-1}x).$$

因此，按照定理 1.4 以及当 R_σ 限制在 $L^p(E_n)$ 上时它是等距算子这一事实可推知，对 $1<p<\infty$，有

$$(2.4) \qquad \left(\int_{E_n} \left\{\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} |(R_{\sigma^{-1}} H_{\varepsilon,\delta}^{(1)} R_\sigma f)(x)|\right\}^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2(b\|\psi\|_1 + \pi B_p)\|f\|_p = C_p\|f\|_p.$$

那么，再利用 Minkowski 不等式以及(2.3)和(2.4)，我们就得到

$$(2.5) \qquad \left(\int_{E_n} \left\{\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} \left|\int_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t')}{|t|^n}dt\right|\right\}^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leqslant C_p\left(\int_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t')|\,dt'\right)\|f\|_p = A_p\|f\|_p.$$

这样，我们再应用第二章定理 3.12，就对具奇核的奇异积分算子得到下述存在性和有界性定理.

定理 2.6 如果 $f\in L^p(E_n)$，$1<p<\infty$，则

$$(Hf)(x) = \lim_{\delta^{-1},\,\varepsilon\to 0} \int_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon>0} f(x-t)K(t)dt$$

对几乎一切 $x\in E_n$ 存在. 而且，存在一个依赖于 p 和维数 n 而不依赖于 f 的常数 $c=c(p,n)$，使得

$$\|Hf\|_p \leqslant c\|f\|_p.$$

由 M. Riesz 变换组成的算子类是一个重要的具有奇核的奇异积分算子类. 在 n 维情形时，它们就是 n 个奇异积分算子 R_1, R_2, $\cdots$, R_n，分别以核

$$K_j(x) = c_n(x'_j/|x|^n) = c_n(x_j/|x|^{n+1})$$

来定义，其中

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E_n,\ j=1, 2, \cdots, n,$$

$$c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$$

(当 $n=1$ 时，我们仅得到一个变换，即 Hilbert 变换). 依第四章

定理 4.5 知道，每个这种核引出一个缓变广义函数，其 Fourier 变换是函数

$$\hat{K}_j(t)=-i\frac{t_j}{|t|},\ t=(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n).$$

于是，当 φ 是测试函数时，$(K_j*\varphi)^\wedge(t)=-i(t_j/|t|)\hat{\varphi}(t)$（参看第一章定理 3.18）．故根据定理 2.6，对任一 $f\in L^2(E_n)$，几乎处处有

$$(R_jf)^\wedge(t)=-i\frac{t_j}{|t|}\hat{f}(t). \tag{2.7}$$

此外，因为 R_jf 也必属于 $L^2(E_n)$，所以我们有

$$(R_j^2f)^\wedge(t)=-\frac{t_j^2}{|t|^2}\hat{f}(t),$$

因此，对一切 $f\in L^2(E_n)$，得

$$\left(\sum_{j=1}^n R_j^2f\right)^\wedge(t)=-\hat{f}(t), \tag{2.8}$$

从而推得

$$\sum_{j=1}^n R_j^2=-I. \tag{2.9}$$

这里，I 是恒等算子（在 $L^p(E_n)$ 上，$1<p<\infty$）．

从等式 (2.7) 和 Plancherel 定理，还可推出 Riesz 变换的下述"酉"特征：

$$\sum_{j=1}^n\|R_jf\|_2^2=\|f\|_2^2. \tag{2.10}$$

§3 具有偶核的奇异积分算子

现在我们来研究与形如(1.7)式的核相关的奇异积分算子，其中的 Ω 满足 $\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')dt'=0$，且是零阶齐次函数，并在 Σ_{n-1} 上可积．我们把 Ω 表作

$$\begin{aligned}\Omega(t')&=\frac{\Omega(t')-\Omega(-t')}{2}+\frac{\Omega(t')+\Omega(-t')}{2}\\&=\Omega^{(1)}(t')+\Omega^{(2)}(t'),\end{aligned}$$

其中 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ 是 Ω 的奇部和偶部. 这时我们把定理 2.6 应用到与核 $\Omega^{(1)}(t)/|t|^n$ 相关的算子上，就可以断言，该算子把 $L^p(E_n)$ 有界地映入自身. 但是，在本章第 1 节末尾我们曾经谈到，为了使得与核 $K(t)=\Omega(t)/|t|^n$ 相关的算子有同样的结论，我们需要对 Ω 假设更多的条件. 我们将要证明，当

$$\|\Omega\|=\left(\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')|^2dt'\right)^{1/2}<\infty$$

时，与核 $K(t)=\Omega(t)/|t|^n$ 相关的算子把 $L^p(E_n)(1<p<\infty)$ 连续地映入自身. 更确切地说，我们将证明下面的定理:

定理 3.1 设 K 是一个形如 $K(t)=\Omega(t)/|t|^n$ 的核，其中

$$\|\Omega\|=\left(\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')|^2dt'\right)^{1/2}<\infty,\ \int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(t')dt'=0,$$

且 Ω 是零阶齐次函数. 那么，对于每个 $x\in E_n$ 和测试函数 $\varphi\in\mathscr{S}$,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|t|\geqslant\varepsilon>0}\varphi(x-t)K(t)dt=(K*\varphi)(x)$$

存在. 此外，当 $1<p<\infty$ 时，存在一个只依赖于 p 和维数 n 的常数 $c=c(p, n)$，使得对一切测试函数 φ，有

$$\|K*\varphi\|_p\leqslant c\|\varphi\|_p.$$

条件 $\|\Omega\|<\infty$ 蕴含其偶部 $\Omega^{(2)}$ 有同样性质成立，并且我们已经知道，对于(更一般的)奇核，上述定理成立，所以可以假定 Ω 是偶的. 我们先把证明这个定理的思路简述如下. 若 T 是与核 K 相关的奇异积分算子，我们把它和 Riesz 变换 $R_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 复合起来，并证明 R_jT 是一个具有上节所研究过的那种奇核的奇异积分算子. 于是存在一个常数 a_p，使 $\|R_jT\varphi\|_p\leqslant a_p\|\varphi\|_p$ 对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$ 成立. 因而，依定理 2.6，有

$$\|R_j(R_jT\varphi)\|_p\leqslant b_p\|R_jT\varphi\|_p\leqslant b_pa_p\|\varphi\|_p.$$

然而，从(2.9)我们知道

$$\|T\varphi\|_p=\left\|\left(\sum_{j=1}^nR_j^2\right)T\varphi\right\|_p\leqslant\sum_{j=1}^n\|R_j(R_jT\varphi)\|_p$$

$$\leqslant nb_pa_p\|\varphi\|_p=c\|\varphi\|_p.$$

本节余下的部分将用来使这一结论精确化. 其证明过程中所需的一些结果已经在第四章第4节中阐明过. 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|\geq\varepsilon}\varphi(x-t)K(t)dt$$

的存在性已经在第四章定理4.7前面证明过了. 按照定理4.7, K 的 Fourier 变换, 作为主值广义函数, 是一个零阶齐次函数. 于是存在定义在 Σ_{n-1} 上的 Ω_0, 使 $\hat{K}(x)=\Omega_0(x')=\Omega_0(x/|x|)$, $x\neq 0$. 而且, 如果 $\Omega=\sum_{k=1}^{\infty}Y^{(k)}$ 是 Ω 在 Σ_{n-1} 上的球调和展开($Y^{(k)}$ 是 k 阶球调和函数, 级数是按 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 范数收敛), 则 Ω_0 有展开式

$$\Omega_0=\sum_{k=1}^{\infty}Y_0^{(k)},$$

其中 $Y_0^{(k)}=\gamma_k Y^{(k)}$, 且

$$\textbf{(3.2)}\qquad \gamma_k=i^{-k}\pi^{n/2}\frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma[(n+k)/2]}=O(k^{-(n/2)}).$$

根据第四章推论4.12知, 函数 Ω_0 在 Σ_{n-1} 上连续, 因而有界[3]. 从而函数 $\hat{K}$ 也有界. 所以, 依第一章定理3.18, 函数 $T\varphi=K*\varphi$ 把每个 $\varphi\in\mathscr{S}$ 映入 $L^2(E_n)$, 算子 T 满足

$$\|T\varphi\|_2=\|K*\varphi\|_2\leqslant\|\hat{K}\|_\infty\|\varphi\|_2,$$

且对 E_n 中之 $t\neq 0$, $(T\varphi)\hat{}(t)=\hat{K}(t)\hat{\varphi}(t)=\Omega_0(t/|t|)\hat{\varphi}(t)$.

因为 $T\varphi$ 属于 $L^2(E_n)$, 所以 $T\varphi$ 的 Riesz 变换 $R_jT\varphi$ 就有意义(见定理2.6)并属于 $L^2(E_n)$. 于是利用(2.7), 我们有

$$\textbf{(3.3)}\qquad \begin{aligned}(R_jT\varphi)\hat{}(t)&=-i\frac{t_j}{|t|}(T\varphi)\hat{}(t)\\&=-i\frac{t_j}{|t|}\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t).\end{aligned}$$

设 $\omega_0(t')=-it'_j\Omega_0(t')$, 其中 $t'=(t'_1, t'_2, \cdots, t'_n)\in\Sigma_{n-1}$, 考虑在 E_n 中 $t\neq 0$ 处之值为 $\omega_0(t/|t|)$ 的函数. 我们现在来证明, 这个函数是由第2节中讨论过的那种奇核所定义的主值广义函数的 Fourier 变换. 为此, 我们需要利用下面的结论.

---

3) Ω_0 的连续性是作为第四章定理4.11中所得表达式的推论而得到的.

引理 3.4 设 $Y^{(k)}$, $k\geqslant 1$, 是 k 阶球调和函数, j 是满足 $1\leqslant j\leqslant n$ 的一个整数. 那么, 存在 $k-1$ 阶和 $k+1$ 阶球调和函数 $W^{(k-1)}$ 和 $W^{(k+1)}$, 使对一切 $t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)\in\Sigma_{n-1}$, 有

$$t_jY^{(k)}(t)=W^{(k-1)}(t)+W^{(k+1)}(t).$$

证明 根据第四章推论 2.3 和 2.4 知, 我们只需证明当 $W^{(l)}$ 是 $l\neq k-1$, $k+1$ 阶球调和函数时, $\int_{\Sigma_{n-1}} t_jY^{(k)}(t)W^{(l)}(t)dt=0$. 令 $P^{(k)}$ 和 $Q^{(l)}$ 是相应的球体调和函数, 且设 $u(x)=x_jP^{(k)}(x)$, $v(x)=Q^{(l)}(x)$. 那么, $\Delta v\equiv 0$, 且

$$(\Delta u)(x)=x_j(\Delta P^{(k)})(x)+2\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x)=2\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x).$$

于是, 按照 Green 定理, 有

$$\textbf{(3.5)}\qquad \begin{aligned}&-2\int_{|x|\leqslant 1} Q^{(l)}(x)\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x)dx\\&=\int_{|x|\leqslant 1}[u(x)(\Delta v)(x)-v(x)(\Delta u)(x)]dx\\&=\int_{\Sigma_{n-1}}\left[u(x')\frac{\partial v}{\partial n}(x')-v(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x')\right]dx'.\end{aligned}$$

但是 $\partial P^{(k)}/\partial x_j$ 是 $k-1$ 阶球体调和函数, 于是当 $l\neq k-1$ 时, (3.5) 中的第一个积分必定是 0. 如果我们记 $x=rt$, 其中 $r=|x|$, 则

$$Q^{(l)}(x)=r^lW^{(l)}(t),$$

且

$$\begin{aligned}(\partial Q^{(l)}/\partial n)(x)&=(\partial/\partial r)(r^lW^{(l)}(t))\\&=lr^{l-1}W^{(l)}(t)=lW^{(l)}(t)\end{aligned}$$

是 $Q^{(l)}$ 在 t 处沿 Σ_{n-1} 外法线方向的导数. 类似地, 从 $u(x)=r^{k+1}t_jY^{(k)}(t)$ 也可推出 $(\partial u/\partial n)(t)=(k+1)t_jY^{(k)}(t)$. 因而, 当 $l\neq k-1$ 时, 有

$$0=l\int_{\Sigma_{n-1}} t_jY^{(k)}(t)W^{(l)}(t)dt-(k+1)\int_{\Sigma_{n-1}} t_jY^{(k)}(t)W^{(l)}(t)dt.$$

所以我们可以断言, 若再有 $l\neq k+1$, 则

$$\int_{\Sigma_{n-1}} t_jY^{(k)}(t)W^{(l)}(t)dt=0.$$

引理得证. 】

由于假定了 Ω 属于 $L^2(\Sigma_{n-1})$，所以表示 Ω 的球调和函数 $\{Y^{(k)}\}$ 必定满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\|Y^{(k)}\|^2=\|\Omega\|^2<\infty$. 因而根据(3.2)，我们有

(3.6) $$\sum_{k=1}^{\infty}k^n\|Y_0^{(k)}\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^n|\gamma_k|^2\|Y^{(k)}\|^2<\infty.$$

设 $\sum_{k=1}^{\infty}y_0^{(k)}$ 是限制在 Σ_{n-1}上的 ω_0 的球调和展开(因为 ω_0 是一个奇函数和一个偶函数的乘积，所以它是奇的，于是 $\int_{\Sigma_{n-1}}\omega_0=0$，且 ω_0 的展开 $\sum_{k=1}^{\infty}y_0^{(k)}$ 不包含零阶调和函数). 从引理 3.4 和不等式(3.6)立刻可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^n\|y_0^{(k)}\|^2<\infty.$$

由第四章定理 4.7 可知，ω_0 是一个形如 $J(x)=\omega(x')/|x|^n$ 的主值广义函数的 Fourier 变换，其中 $\omega\in L^2(\Sigma_{n-1})$，满足

$$\int_{\Sigma_{n-1}}\omega(x')dx'=0.$$

实际上，这最后的等式是 ω 为奇函数的推论(因 J 的 Fourier 变换是奇函数). 于是由定理 2.6 推出，当 $1<p<\infty$ 时，存在一个不依赖于 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的常数 A_p，使得

$$\|J*\varphi\|_p\leqslant A_p\|\varphi\|_p.$$

此外，由于 $\varphi\in L^2(E_n)$，那么利用第一章定理 3.18，我们就可看出，$(J*\varphi)\hat{}(t)=-i(t_j/|t|)\Omega_0(t/|t|)\hat{\varphi}(t)$. 又由于 $J*\varphi\in L^p(E_n)$，$1<p<\infty$，我们可以再次应用定理 2.6，而得到

$$[R_j*(J*\varphi)](x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|t|>\varepsilon}(J*\varphi)(x-t)K(t)dt$$

对几乎每个 $x\in E_n$ 存在，且

(3.7) $$\|R_j*(J*\varphi)\|_p\leqslant B_p\|\varphi\|_p,$$

其中 B_p 与 φ 无关. 特别因为 $J*\varphi\in L^2(E_n)$，我们用 $\mathscr{S}$ 中的函数来逼近 $J*\varphi$，再利用第一章定理 3.18，就得出

$$[R_j*(J*\varphi)]\hat{}(t)=-\frac{t_j^2}{|t|^2}\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t).$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{n}[R_j*(J*\varphi)]^{\wedge}(t)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{t_j^2}{|t|^2}\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t)$$

$$=-\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t)=-(K*\varphi)^{\wedge}(t).$$

这就表明 $\sum_{j=1}^{n}R_j*(J*\varphi)=-K*\varphi$, 并由(3.7)知

$$\|K*\varphi\|_p\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|R_j*(J*\varphi)\|_p\leqslant nB_p\|\varphi\|_p.$$

于是, 取常数 $c=c(p,n)=nB_p$, 定理 3.1 得证. 】

§4 共轭调和函数的 H^p 空间

在第三章第1节近末尾部份, 我们引入了由某些向量值函数

$$F(x,y)=(u_1(x,y),\cdots,u_{n+1}(x,y))$$

组成的空间, 这些向量值函数定义在 $(x,y)\in E_{n+1}^{+}$ 上, 其中 $u_j(j=1,2,\cdots,n+1)$ 满足第三章的偏微分方程组(1.6)和不等式

$$\text{(4.1)}\qquad \int_{E_n}|u_j(x,y)|^p dx\leqslant A<\infty,\ \text{对一切}\ y>0.$$

当 $p>1$ 时, 边界值 $\lim_{y\to 0}u_j(x,y)=u_j(x,0)$ 的存在性(不论是几乎处处还是依范数)是第二章定理 2.5 和 3.16 的直接推论, 且这个存在性只依赖于条件(4.1). 实际上, 定理 3.16 保证了非切向边界值几乎处处存在. 而且我们还可以利用定理 2.5 之(b), 对 $p=1$ 的情形证明这一点. 但是如果我们只假定调和函数满足条件(4.1)而不满足方程组(1.6), 则依范数收敛性就可能不成立. 例如, 若一个调和函数 $u(x,y)=u_j(x,y)$ 是 Dirac-δ 测度 μ (即当 $0\notin A\subset E_n$ 时, $\mu(A)=0$; 当 $0\in A$ 时, $\mu(A)=1$) 的 Poisson-Stieltjes 积分, 那么, $u(x,y)$ 就是 Poisson 核

$$P(x,y)=c_n\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}},$$

并因而只要 $x_0\neq 0$, 当 (x,y) 非切向趋于 $(x_0,0)=x_0\in E_n$ 时, $u(x,y)$ 就趋于 0. 但另一方面却有

$$\lim_{y\to 0}\int_{E_n}|u(x,\ y)-u(x,\ 0)|\,dx=\lim_{y\to 0}\int_{E_n}P(x,\ y)\,dx=1.$$

当 $n=1$ 时，这种情况说明了调和函数和解析函数在边界值性质方面的一个重要区别. 如果 u_1 和 u_2 是 E_2^+ 上满足(4.1)的解析函数的实部与虚部，那么，只要 $p>0$，所说的边界值就存在(这正是第三章定理 5.1 中 $n=1$ 的情形). 由于函数 u_1 和 u_2 与 Cauchy-Riemann 方程相关联，这就使我们能够对更大范围的指标 p 得到边界值的存在性. 第三章的方程 (1.6)可能是 Cauchy-Riemann 方程的最直接的推广. 这些调和函数系所具有的基本性质是：存在某些指标 $p<1$，使 $(|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_{n+1}|^2)^{p/2}$ 是次调和的(参看下面的定理 4.14). 这就推广了以下事实: 当 F 是单复变量解析函数时，$\log|F|$ 是次调和的(参看第二章 § 4 例 3). 下面的结果说明了如何应用这些性质来得到所期望的边界值.

定理 4.2 假定 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k$ 是 E_{n+1}^+ 上的实值调和函数，使得存在一个正的 $p_0<1$，有

$$s=(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_k^2)^{p_0/2}$$

是次调和的. 设 $F=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k)$，且对于一切 $y>0$ 和某个 $p>p_0$，不等式(4.1)成立，那么，当 $(w,\ y)$ 非切向趋于 $(x,\ 0)$ 时，极限

$$u_j(x,\ 0)=\lim_{(w,y)\to(x,0)}u_j(w,\ y)\tag{4.3}$$

对几乎每个 $x\in E_n$ 存在，此外还有

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 0}\int_{E_n}|F(x,\ y)-F(x,\ 0)|^p dx\\&=\lim_{y\to 0}\int_{E_n}\left(\sum_{j=1}^{k}(u_j(x,\ y)-u_j(x,\ 0))^2\right)^{p/2}dx=0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

证明 设 $q=p/p_0>1$，则由于(4.1)成立，故对一切 $y>0$，有

$$\int_{E_n}[s(x,\ y)]^q dx=\int_{E_n}|F(x,\ y)|^p dx\leqslant A<\infty.$$

又因 s 是次调和的，所以我们从第二章定理 4.6 知道，s 有一个最小调和控制函数 m，它是一个函数 $f\in L^q(E_n)$ 的 Poisson 积分. 于

是按照第二章定理 3.16, m 在 E_n 的几乎每个点处有非切向极限. 又因 $s\leqslant m$, 故函数 s 必在 E_n 中几乎处处非切向有界, 且 $|u_j|\leqslant s^{1/p_0}$, $j=1, 2, \cdots, k$, 也在 E_n 中几乎处处非切向有界. 那么, 我们应用第二章定理 3.19, 就得到非切向极限(4.3)的存在性. 从这些极限的存在性和 Lebesgue 控制收敛定理 (因 m 和 f 都被 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数控制, 而这个极大函数属于 $L^q(E_n)$), 便可推出依范收敛性(4.4)(参看第二章定理 3.10 和 3.7). 定理证毕. 】

当 $p=p_0$, 因而 $q=1$ 时, 我们仍然有 s 的最小调和控制函数 m, 但是我们只能断定 m 是 E_n 上一个有限 Borel 测度的 Poisson-Stieltjes 积分(参看第二章定理 4.6 的最后部份). 因而我们不能象上面那样应用控制收敛定理而从非切向极限 (4.3) 的存在性得到(4.4)的收敛性. 但另一方面, 这些非切向极限确实几乎处处存在, 因为该 Poisson-Stieltjes 积分 m 有这种极限[4]. 于是 s 就一定非切向有界.

从这个定理我们看出, 只要 F 的 k 个分量相互有联系, 使得存在 $p_0<1$, 有 $s=|F|^{p_0}$ 是次调和的, 就可以得到古典 H^p 空间理论的一个有意义的推广. 我们已经知道, 当 $n=2=k$ 时, 如果这些分量满足 Cauchy-Riemann 方程, 则对一切 $p>0$, $|F|^p$ 是次调和的(实际上, $\log|F|$ 是次调和的). 因此, 我们自然会考虑一个问题, 即有哪些常系数一阶线性偏微分方程组, 它们的解 $F=(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 是调和的, 并且具有这种次调和性质. 现在, 任一这种偏微分方程组都能写成

$$(4.5)\qquad \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial F}{\partial x_j}=0$$

的形式, 其中 A_j 是 $l\times k$ 阶常数矩阵, $\partial F/\partial x_j$ 是以 $\partial u_i/\partial x_j$, $i=1$,

4) 如果 m 是有限Borel测度 μ 的 Poisson-Stieltjes 积分, 并且引入极大函数

$$M_\mu(x)=\sup_{S_x}(1/|S_x|)\int_{S_x} d\mu(t),$$

则易验证, 把第二章 §3 的论证做适当修改后, 可以用来证明 m 的几乎处处收敛性.

$2, \cdots, k$ 为分量的(列)向量[5].

如果这个方程组的每个解 $F=(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 的各分量 u_i, $i=1, 2, \cdots, k$ 都是调和的，我们就称这个方程组为广义 Cauchy-Riemann 方程组(GCR). 它的每个这样的解就叫作一个共轭调和函数系. 我们将证明，当 $n=2=k=l$ 时，对这个方程组进行一个线性变换，就可以化为通常的 Cauchy-Riemann 方程组. 不过在证明它之前，我们先进行一些更一般的考察.

我们称方程组(4.5)是椭圆型的，如果对一个 k 维(列)向量 v 和一个 n 元数组 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，仅当 v 或 λ 为 0 时，有

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j A_j v=0. \tag{4.6}$$

我们断言，每个 GCR 方程组都是椭圆型的. 如若不然，就可以找到非零 v 和 λ，使 (4.6) 成立. 但这时 $F(x)=\left\{\exp\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right\}v$ 就是(4.5)的一个非调和解. 因此，(4.5)不可能是 GCR 方程组.

如果所考虑的方程组是椭圆型的，并且 $\lambda\neq 0$，那么显然，从 k 维欧氏空间到 l 维欧氏空间的映射 $v\to\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j A_j\right)v$ 一定是一一的(否则，就会有一个非零向量 v 映射成零向量，这与椭圆性矛盾)；所以 $l\geqslant k$. 取 λ 使 $\lambda_j=1$，而在 $i\neq j$ 时，$\lambda_i=0$，我们就会看到，每个矩阵 A_j, $j=1, 2, \cdots, n$, 代表一个一一映射. 特别当 $k=l$ 时，这些矩阵一定是可逆的. 此外，若 $n=2=k$，则方程组(4.5)等价于下面的方程组:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+A\frac{\partial F}{\partial x_2}=0, \tag{4.7}$$

其中，A 是一个非奇异矩阵(因这时，我们可以将(4.5)两端同乘

5) 当我们首先引入满足(1.6)的 F 时，我们曾假定它是一个 $n+1$ 个变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 的函数，此处 $y>0$，并且 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 被当作 E_n 中的点. 如不等式(4.1)所示，变量 y 起着特殊的作用，显然它对推广 H^p 空间的概念是必要的. 另一方面，$|F|^p$ 对某 $p>0$ 是次调和的这一性质并不涉及这一特殊变量. 正因如此，我们在 E_n 中的一个定义域上来引进这些函数组，而对这些变量不加区别.

A_1^{-1}). 我们现在假定(4.7)是 GCR 方程组，那么，从任一解 F 的调和性可知，

$$(4.8) \qquad (A+A^{-1})\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}=0.$$

但是，任意给定一个二维向量 b，总存在 (4.7) 的一个解，使 $\partial^2 F/\partial x_1\partial x_2 \equiv b$. 实际上，$F(x_1, x_2)=2x_1x_2b-(x_1^2Ab+x_2^2A^{-1}b)$就是这样一个解.又因它必满足(4.8)，我们就可断定 $A+A^{-1}=0$，或等价地 $A^2=-I$. 这就得知 A 一定形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

其中 $a^2+bc=-1$. 由这最后的等式可推出 $bc<0$. 那么矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

有逆矩阵并满足

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，如果我们定义 G 为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=G=Q^{-1}F=Q^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

那么方程(4.7)就等价于

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x_2}=Q^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}+A\,\frac{\partial F}{\partial x_2}\right]=0.$$

而这就是对 v_1 和 v_2 的古典的 Cauchy-Riemann 方程.

现在我们引进一个与任一固定的广义 Cauchy-Riemann方程组相关联的函数空间. 若 $p>0$，且 $F=(u_1, u_2, \cdots, u_k)$是这个方程组在区域 E_{n+1}^+ 中的解，则当存在 $A<\infty$，使得对任何 $y>0$，有

$$\int_{E_n}|F(x, y)|^p dx$$
$$=\int_{E_n}(|u_1(x, y)|^2+\cdots+|u_k(x, y)|^2)^{p/2}dx \leqslant A$$

时，我们就说 F 属于 $\boldsymbol{H}^p(E_{n+1}^+)$. 基于前面的分析，空间 $\boldsymbol{H}^p(E_{n+1}^+)$

显然推广了上半平面解析函数的古典 H^p 空间. 下面的结果连同定理 4.2 表明,这个定义使我们能够对指标 $p<1$ 来建立这些空间的很有意义的理论.

定理 4.9 设 F 是广义 Cauchy-Riemann 方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial F}{\partial x_j}=0$$

的解. 则当 $p\geqslant 2-(1/\alpha)$ 时, $|F|^p$ 是次调和的, 其中 α 是一个只依赖于矩阵 $A_1, \cdots, A_n$ 的小于 1 的正数.

证明 依第二章定理 4.4,我们只需证明, $s=|F|^p$ 在 F 的定义域中使 $s(x)>0$ 之一切 x 的集合上, 有非负的 Laplace 算子运算. 由于 F 有调和分量,所以在 x 的这个集合上,有

$$\begin{aligned}\Delta s=p|F|^{p-2}\{(p-2)|F|^{-2}\sum_{j=1}^{n}(F\cdot F_j)^2\\ +\sum_{j=1}^{n}|F_j|^2\},\end{aligned}$$

其中, $F_j=\partial F/\partial x_j$, $F\cdot F_j=\sum_{i=1}^{k}u_i(\partial u_i/\partial x_j)$. 那么, 条件 $\Delta s\geqslant 0$ 就等价于

$$\sum_{j=1}^{n}(F\cdot F_j)^2\leqslant\frac{1}{2-p}|F|^2\sum_{j=1}^{n}|F_j|^2. \qquad (4.10)$$ [6]

现在我们断言,存在一个只依赖于 $A_1, \cdots, A_n$ 的正数 $\alpha<1$,满足

$$\max_{|v|=1}\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2\leqslant\alpha\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2, \qquad (4.11)$$

其中, $u^{(1)}, \cdots, u^{(n)}$ 是 n 个 k 重数组, 且满足

$$\sum_{j=1}^{n}A_j u^{(j)}=0. \qquad (4.12)$$

这样就能推出 (4.10). 为了证明我们的断言, 显然可以假定 $\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2=1$. 如果不存在 $\alpha<1$ 使(4.11)成立, 则根据紧致性, 必存在 v, $u^{(1)}, \cdots, u^{(n)}$ 满足(4.12), 同时 $|v|^2=1=\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2$, 使有 $\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2=1$. 但是根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

6) 在推导(4.10)时, 我们假定 $p<2$. 因为 $p\geqslant 2$ 时, $\Delta s\geqslant 0$ 是显然的.

$$\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2|v|^2=\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2=1.$$

故由$(u^{(j)}\cdot v)^2\leqslant|u^{(j)}|^2|v|^2$，我们必有$(u^{(j)}\cdot v)^2=|u^{(j)}|^2|v|^2$，$j=1, 2, \cdots n$．那么，按 Cauchy-Schwarz 不等式之等号成立的条件，定有$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，使$u^{(j)}=\lambda_j v$．但这与椭圆型条件(4.6)矛盾，因为此时我们会有

$$0=\sum_{j=1}^{n}A_j u^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j A_j v,$$

其中$|\lambda|^2=(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)=1=|v|^2$．于是得知，这样的$\alpha$是存在的．定理得证．】

显然，使定理 4.9 成立的最小数α依赖于F所满足的 GCR 方程组．在许多重要的情形中，这个数是能够计算出来的．例如，我们考虑第三章引入的 M. Riesz 偏微分方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0\\&\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i, j=1, 2, \cdots, n,\end{aligned}\tag{4.13}$$

(参看第三章(1.6))，这时，$\alpha=(n-1)/n$．更确切地说，我们给出下述结果：

定理 4.14 若$F=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$是 M. Riesz 方程组(4.13)的一个解，则对$p\geqslant(n-2)/(n-1)$，$|F|^p$是次调和的．而且，存在这样的解F，使$|F|^p$在$0<p<(n-2)/(n-1)$时不是次调和的．

证明 从定理 4.9 的证明看出，只要$u^{(j)}=(u_{j1}, u_{j2}, \cdots, u_{jn})$，$j=1, 2, \cdots, n$，是满足$\sum_{j=1}^{n}u_{jj}=0$和$u_{ij}=u_{ji}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$的n重数组，我们就只需找到满足(4.11)的最小数α即可．若令$\mathscr{M}$表示以u_{ij}为系数的$n\times n$矩阵，那么前面的这些关于u_{ij}的条件等价于$\mathscr{M}$是对称的，其迹为 0．于是不等式(4.11)可以写成

$$\max_{|v|=1}|\mathscr{M}v|^2\leqslant\alpha\|\mathscr{M}\|^2,\tag{4.15}$$

其中，$\|\mathscr{M}\|=(\sum_{i,j=1}^{n}u_{ij}^2)^{1/2}$是矩阵 $\mathscr{M}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数. 自然，(4.15)的左端是一个 E_n 上的算子范数的平方，这个算子把 v 映成 $\mathscr{M}v$. 而我们从初等线性代数知识知道，若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\mathscr{M}$ 的特征根(必然都是实数，因为 $\mathscr{M}$ 是对称的)，那么此算子范数是$\|\mathscr{M}\|=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$，而$\|\mathscr{M}\|=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2)^{1/2}$. 因为迹 $\mathscr{M}=0$，所以 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0$. 从而，如果不妨设$|\lambda_j|=\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$，我们便有

$$\|\mathscr{M}\|^2=|\lambda_j|^2=|-\sum_{i\neq j}\lambda_i|^2\leqslant(n-1)\sum_{i\neq j}\lambda_i^2.$$

在这不等式两端各加$(n-1)|\lambda_j|^2$，我们得到

$$n\|\mathscr{M}\|^2=n|\lambda_j|^2\leqslant(n-1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_i^2=(n-1)\|\mathscr{M}\|^2,$$

并且导出(4.15)，其中之 α 为$(n-1)/n$. 这样我们根据定理 4.9 就可以断定，当 F 是 M. Riesz 方程组的一个解时，$|F|^p$ 对 $p\geqslant 2-(1/\alpha)=(n-2)/(n-1)$是次调和的.

为了说明$|F|^p$一般对于小于$(n-2)/(n-1)$的指数 p 不是次调和的，我们令 F 是函数 h 的梯度，而$h=|x|^{2-n}/(2-n)$. 经过简单计算表明，

$$\textbf{(4.16)}\qquad \begin{aligned}\Delta(|F|^p)&=\Delta(|\nabla h|^p)\\&=p(n-1)\{p(n-1)-(n-2)\}|x|^{p(1-n)-2}.\end{aligned}$$

因而当$p<(n-2)/(n-1)$时，$\Delta(|F|^p)<0$. 所以按照第二章定理 4.4，可知 $-|F|^p$ 在 $E_n-\{0\}$中是次调和的. 于是 $-|F|^p$ 满足第二章的平均值不等式(4.2). 假如$|F|^p$ 也是次调和的，就也要满足这个平均值不等式，那么它必具有平均值性质. 再由第二章定理(1.7)，$|F|^p$ 就是调和的了. 而根据(4.16)，它对这样的 p 显然不能是调和的. 】

我们可以用下面的办法得到更大一类满足 M. Riesz 方程组(4.13)的共轭调和函数系. 设 f 属于 $L^p(E_n)$，$1<p<\infty$，考虑 Poisson 积分

$$u(x, y)=c_n\int_{E_n} f(t)\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt,$$

和卷积 $$v_j(x, y)=c_n\int_{E_n} f(t)\frac{x_j-t_j}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt,$$

$$j=1, 2, \cdots, n,$$

其中 $x\in E_n$, $y>0$. 经计算各有关的偏导数，我们容易验证，$F=(u, V)=(u, v_1, v_2, \cdots, v_n)$是定义在 E_{n+1}^+ 的 M. Riesz 方程组的解. 当 $n=1$ 时，$v=v_1$ 就是我们原先用来定义 f 的 Hilbert 变换 $\tilde{f}$ 的函数(见 § 1). 经过对 v 和 $\tilde{f}$ 的讨论，容易得到它们的某些基本性质：$F=u+iv$ 在 E_2^+ 上解析，且 $\sup\limits_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^p dx<\infty$，因而 $F\in H^p(E_2^+)$. 因此，$f+i\tilde{f}$ 是 F 的几乎处处非切向极限，也是 F 的依 L^p 范数的极限(即，

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x, y)+iv(x, y)-f(x)-i\tilde{f}(x)|^p dx=0).$$

这些性质和第 1 节中所建立的其它结果，都易推广到 n 维，并且按这一意义，我们可以在各种奇异积分算子中，把 M. Riesz 变换当作是 Hilbert 变换的最自然的推广. 现在，就以说明如何将它推广到多维情形来作为本节的结尾.

定理 4.17 设 $f\in L^p(E_n)$, $1<p<\infty$, $\tilde{f}_j=R_jf$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 f 的 M. Riesz 变换，$u(x, y)$是 f 的 Poisson 积分，$v_j(x, y)$ 是 f 与核 $c_nt_j/(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}$ 的卷积. 那么，

(i) 函数 $F=(u, v_1, \cdots, v_n)\in \boldsymbol{H}^p(E_{n+1}^+)$;

(ii) $$\int_{E_n} f(x-t)\frac{t_j}{(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt$$

$$=\int_{E_n}\tilde{f}_j(x-t)\frac{y}{(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt,\ j=1, 2, \cdots, n;$$

(iii) 在 f 的 Lebesgue 集的每个点上，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{E_n} f(x-t)\frac{t_j}{(|t|^2+\varepsilon^2)^{(n+1)/2}}dt\right.$$

$$\left.-\int_{0<\varepsilon<|t|} f(x-t)\frac{t_j}{|t|^{n+1}}dt\right\}=0.$$

(iv) $\left(\int_{E_n}\{\sup_{y>0}|v_j(x, y)|\}^p dx\right)^{1/p}\leqslant A\|f\|_p$, 其中 A 是一个只依赖于维数 n 和指标 p 的常数

证明 所有这些结论，或是我们已经证明过的定理的直接推论，或是把相应的一维情形的证明做些显而易见的修改，就可以得到。例如，为证明(iii)，我们可以基本上使用引理 1.2 的证明方法，只是不用函数(1.3)而代之以

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}-\dfrac{t_j}{|t|^{n+1}}, & \text{当 } |t|\geqslant 1;\\ \dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}, & \text{当 } |t|<1,\end{cases}$$

并且，对 $\varepsilon>0$, $\varphi_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n}\varphi(t/\varepsilon)$. 这样，(iii)的括号中的表达式就简化成 $\int_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt$. 又由

$$\psi(x)=\sup_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{\text{常数}}{|x|^n(1+|x|^2)}, & \text{当} |x|\geqslant 1;\\ \text{常数}, & \text{当} |x|<1,\end{cases}$$

推出 $\psi(x)\in L^1(E_n)$，这就使我们能够应用第一章定理 1.25，而得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt=f(x)\int_{E_n}\varphi(t)dt=0,$$

(iii)得证.

当 $\varepsilon>0$ 时，我们断言，对 $(x, y)\in E_{n+1}^+$，有

$$\text{(4.18)}\quad \frac{x_j}{(|x|^2+(y+\varepsilon)^2)^{(n+1)/2}} =c_n\int_{E_n}\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\ \frac{t_j}{(|t|^2+\varepsilon^2)^{(n+1)/2}}dt.$$

这是对 $u(x, y)=\dfrac{x_j}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$, $y_2=y$, $y_1=\varepsilon$，直接应用第二章引理 2.7 的结果.

现在，从(4.18)立刻得到，函数

$$P_y(x)=c_n\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$$

(即 Poisson 核)的第 j 个 M. Riesz 变换是第 j 个共轭 Poisson 核

$$Q_y^{(j)}(x)=c_n\frac{x_j}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}.$$

这时由于等式两端的 Fourier 变换是函数

$$-ie^{-2\pi|x|y}\hat{f}(x)\frac{x_j}{|x|},\quad x\in E_n,$$

从而容易得出性质(ii)(见第一章定理 1.14 和本章(2.7)). 性质(i)则是(ii)和第二章不等式 (2.2) 以及定理 2.6 的推论. 从定理 2.6 和等式(ii)以及第二章定理 3.10 和 3.7, 我们就得到(iv). 】

§ 5 进一步的结果

5.1 在古典的 Fourier 级数理论中, 类似于 Hilbert 变换的是单位圆 $\{z\in \boldsymbol{C};\ |z|=1\}$ 上函数 f 的共轭函数. 如同 Hilbert 变换一样, f 的共轭函数 $\tilde{f}$ 可以用单复变函数论的方法定义, 也可以用纯实变方法定义. 如果我们把 f 看作变量 $\theta\in[0,\ 2\pi]$ 的实值可积函数, 并设

$$Q(r,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},\quad 0<r<1,$$

为共轭 Poisson 核, 那么函数

$$v(z)=v(re^{i\theta})=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\phi)Q(r,\ \phi)d\phi$$

便是 Poisson 积分

$$\begin{aligned}u(z)=u(re^{i\theta})&=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\phi)P(r,\ \phi)d\phi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\phi)\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi+r^2}d\phi\end{aligned}$$

的共轭调和函数. 也就是说, $F(z)=u(z)+iv(z)$ 在单位圆盘 $\{z\in \boldsymbol{C};\ |z|<1\}$ 内解析. 我们在第五章引理 2.6 的证明中做一些简单的变动, 就能证明, 对几乎一切$[0,\ 2\pi]$中之 θ, 当 z 非切向趋于边界点 $e^{i\theta}$ 时, $F(z)$ 趋于一个极限(详见 Zygmund [1], Ch. VII), 所以 F 的虚部也一定几乎处处有非切向边界值. 取此边界

值的函数 f^c 就是 f 的共轭函数. 即 f^c 几乎处处由下式定义为

$$f^c(\theta)=\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\phi)Q(r,\ \phi)d\phi.$$

对引理1.2的证明进行简单修改后看出, f^c 还可以几乎处处由下式定义为

$$f^c(\theta)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0<\varepsilon<|\phi|<\pi}f(\theta-\phi)\frac{\sin\phi}{1-\cos\phi}\,d\phi.$$

如果 $f\in L^2(0,\ 2\pi)$,并且它的 Fourier 级数是 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ik\theta}$,按类似于第五章(2.7)的证明,我们可推知,$f^c$ 也属于 $L^2(0,\ 2\pi)$, 它的 Fourier 级数是 $\sum_{K=-\infty}^{\infty}(-i\,\text{sgn}\,k)c_ke^{ik\theta}$, 因而 $\|f^c\|_2\leqslant\|f\|_2$. 这样我们就希望对共轭函数能成立一个类似于第五章 (2.11)的不等式. 事实上, 可以证明映射 $f\to f^c$ 是弱 (1, 1) 型的, 那么借助于 Marcinkiewicz 插值定理, 我们可得, 对 $1<p<\infty$, 有 $\|f^c\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$, 这里 A_p 依赖于 p 而不依赖于 $f\in L^p(0,\ 2\pi)$. 又根据第五章定理3.15,我们只需证明这个映射是限制弱(1, 1)型的即可. 而这很容易用下述办法实现:

令 E 是 $[0,\ 2\pi]$的可测子集, χ_E 是它的特征函数. 若 $u(z)$ 和 $v(z)$ 表示 χ_E 的 Poisson 积分和共轭 Poisson 积分, 则函数 $F(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $|z|<1$ 上是解析的. 于是对每个实数 y, $\exp\{yF(z)\}$ 就在 $|z|<1$ 解析, 且根据平均值定理知, 对于 $0\leqslant r<1$, 有

$$e^{y|E|/2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{yF(re^{i\theta})\}d\theta.$$

令 r 趋于1, 利用 Lebesgue 控制收敛定理便得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{y[\chi_E(\theta)+i\chi_E^c(\theta)]\}d\theta=e^{y|E|/2\pi}$$

对一切实数 y 成立. 设 $E'=[0,\ 2\pi]-E$, 我们可把上述等式写成

$$2\pi e^{y|E|/2\pi}=e^y\int_E\exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta+\int_{E'}\exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta.$$

对此等式两端取复共轭, 并用 $-y$ 代替 y, 则得

$$2\pi e^{-y|E|/2\pi}=e^{-y}\int_E \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta$$
$$+\int_{E'}\exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta$$

对所有实数 y 成立. 于是我们就可以求解 $\int_E \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta$ 和 $\int_{E'}\exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta$, 并且看出 $\int_0^{2\pi}\exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}d\theta$ 只依赖于 y 和 $|E|$. 如果令 $\eta(s)=|\{\theta\in[0,2\pi]: \chi_E^c(\theta)>s\}|$, $\nu(s)=|\{\theta\in[0,2\pi]: \chi_E^c(\theta)<s\}|$, 那么, 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iys}d\eta(s) \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{iys}d\nu(s)$$

由 y 和 $|E|$ 完全确定. 因为测度是由它们的 Fourier 变换完全确定的, 故 η 和 ν 只依赖于 $|E|$. 又因 $\lambda(s)=|\{\theta: |\chi_E^c(\theta)|>s>0\}|=\eta(s)+\nu(-s)$, 故 χ_E^c 的分布函数 λ (参看第五章§2)也只依赖于 $|E|$. 若设 χ 是区间 $[0, |E|]$ 的特征函数, 则共轭函数 χ_E^c 及其分布函数都特别便于计算, 我们得到

$$e^{i\lambda(s)/2}=\frac{\sinh(\pi s)+i\sin(|E|/2)}{\sinh(\pi s)-i\sin(|E|/2)}.$$

由此易导出共轭函数算子的限制弱(1, 1)型.

5.2 设 $E\subset(-\infty,\infty)$ 是有限测度集, λ 是 E 的特征函数之 Hilbert 变换的分布函数. 可以证明, 对 $s>0$,

$$\lambda(s)=2|E|/\sinh(\pi s).$$

当然也就推出 Hilbert 变换是限制弱 (1, 1) 型的. 关于这一事实的证明和 (5.1) 末尾的函数关系的证明, 可参看 Stein 和 G. Weiss[2]. 而对上面 $\lambda(s)$ 表达式的另一证明, 可参看 Calderón[1].

5.3 (5.2) 中的等式可以写成 χ_E 的 Hilbert 变换 $\tilde{\chi}_E$ 的非增重排. 这样做我们就得到公式

$$\tilde{\chi}_E^*(t)=\frac{1}{\pi}\sinh^{-1}(2|E|/t).$$

如果 $$\tilde{f}(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{R>|t|>\varepsilon}\frac{\Omega(t)}{|t|^n}f(x-t)dt$$

是第 2 节所讨论的那种奇异积分算子，我们就可把上述关系作如下推广. 设 E 是 E_n 的具有有限测度的可测子集，χ_E 是它的特征函数，且 $m(t)=(1/t)\int_0^t \chi_E^*(s)ds$ (参看第五章 § 3)，则有

$$tm(t)\leqslant\frac{\|\Omega\|}{2}\int_0^t \sinh^{-1}(2|E|/s)ds,$$

此处，$\|\Omega\|=\int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(x')|dx'$. (见 O'Neill 和 G. Weiss[1].) 这一结果连同第五章插值定理 3.15，给出了"$f\to\tilde{f}$ 是 $L^p(E_n)$ 上的有界算子"的另一证明(定理 2.6).

5.4 在第 3 节中，我们曾经提到，如果核 $K(t)=\Omega(t)/|t|^n$ 是偶的，则需要假定比 Ω 在 Σ_{n-1} 上的可积性更多的条件，才能得到 $L^p(E_n)(1<p<\infty)$ 上的一个有界奇异积分算子(虽然可积性条件对奇核是足够的). 实际上，我们假定了 Ω 是平方可积的，这使我们能够利用第 3 节给出的 (比较) 简单的证明. 然而可以证明，如果把 Ω 的平方可积条件换成限制性较弱的条件

$$(*)\qquad \int_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(x')\log^+|\Omega(x')||dx'<\infty,$$

定理 3.1 仍然成立，其中，当 $s\geqslant1$ 时，$\log^+ s=\log s$; 当 $0\leqslant s<1$ 时，$\log^+ s=0$(参看 Calderón 和 Zygmund[4]).

5.5 定理 2.6 比定理 3.1 在另外一方面更具一般性. 定理 2.6 保证了所讨论的奇异积分算子对一切 $f\in L^p(E_n)$ 几乎处处有定义，而在定理 3.1 中，我们将算子的定义域限制在 $\mathscr{S}$ 上. 当 $\varphi\in\mathscr{S}$ 时，积分

$$\int_{|t|>\varepsilon}\varphi(x-t)\,\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt$$

是有意义的，因而，定义(1.8)下面脚注中所说的问题在这里就不会出现. 但是我们不必限制在 $\mathscr{S}$ 上讨论，因为可以证明，对几乎每个 x，积分

$$\int_{|t|>\varepsilon>0}f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt$$

是绝对收敛的，而且只要 $f\in L^p(E_n)$，$1<p<\infty$，甚至在 Ω 满足

(5.4)的较弱的条件 (*) 时，该积分在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限在 p 次幂平均意义下和点态几乎处处的意义下都存在(参看 Calderón 和 Zygmund[4]).

5.6 经简单的讨论可知，Riesz 变换 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 有下列性质:

(1) 每个 R_j 与平移变换可交换;

(2) 每个 R_j 与伸缩变换可交换;

(3) 若 ρ 是一个旋转变换，其矩阵为 (ρ_{jk})，T_ρ 是作用在定义于 E_n 上之函数 f 上的算子: $(T_\rho f)(x)=f(\rho x)$，则

$$T_{\rho^{-1}}R_jT_\rho=\sum_{k=1}^{n}\rho_{jk}R_k.$$

此外，由定理 2.6:

(4) 每个 R_j 把 $L^2(E_n)$ 有界地映入自身.

当 $n\geqslant 3$ 时，这四个性质就表征了 Riesz 变换. 更确切地说，若 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 是 $L^2(E_n)$ 上满足(1)，(2)，(3)和(4)的算子，则它们是 Riesz 变换的一个定常数倍. 其证明梗概是: 由第一章定理 3.16 和 3.18 看出，性质(1)和(4)可推出，当限制在 $\mathscr{S}$ 上考虑时，每个 R_j 是一个形如 $R_j\varphi=u_j*\varphi(\varphi\in\mathscr{S})$ 的卷积算子，其中 u_j 是一个广义函数，其 Fourier 变换 $\hat{u}_j=b_j$ 是一个有界函数. 性质(2)连同第一章(1.6)可推出，每个 b_j 是零阶齐次的. 最后，从性质(3)和算子 T_ρ 与 Fourier 变换的可交换性(第四章定理 1.1)可知，对一切旋转变换 ρ 和 $x\in E_n$，有

$$b_j(\rho^{-1}x)=\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}b_k(x).$$

固定 $x\in E_n$，$x\neq 0$，并令 ρ 取遍一切旋转变换，我们就看到，b_j 由 $(b_1(x), \cdots, b_n(x))=b(x)$ 完全确定(当然，我们用到了 b_j 的零阶齐次性). 如果 y 是 E_n 中的任何一点，$|y|=|x|$，设 σ 是满足 $y=\sigma^{-1}x$ 的旋转变换，那么，对于任一个使 x 不动的旋转变换，有

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}\rho_{lj}\sigma_{kl}\Big)b_k(x)=b_j(\sigma^{-1}\rho^{-1}x)=b_j(\sigma^{-1}x)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{kj}b_k(x).$$

这就是说，向量 $b=b(x)$ 对一切使 x 不动的旋转变换 ρ 来说，有性质 $\sigma\rho b=\sigma b$. 而这就意味着 b 必是 x 的倍数. 这一事实连同 (2.7) 显然能推出 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 是 Riesz 变换的常数倍. 当 $n=2$ 时，这一论证不再成立，因为此时对一切使 x 不动的旋转变换 ρ, $\rho b=b$ 不再能推出 $b(x)$ 是 x 的倍数(在 E_2 中，使 x 不动的旋转变换一定是恒等变换). 但是，如果我们把旋转群换成正交群，就一定可以得到一个对 $n=2$ 也成立的 Riesz 变换的特征.

5.7 在偏微分方程理论中，奇异积分算子是重要的工具. 例如，Riesz 变换可以用以估计 Laplace 算子：

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

由于当 $\varphi\in\mathscr{S}$ 时，$\partial^2\varphi/\partial x_j\partial x_k$ 和 $-R_jR_k\Delta\varphi$ 的 Fourier 变换必定相等(这是本章(2.7)和第一章定理 1.8 的直接推论)，故有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}=-R_jR_k\Delta\varphi.$$

于是由定理 2.6，我们得到

$$\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\right\|_p\leqslant A_p\|\Delta\varphi\|_p,\ 1<p<\infty,$$

并且，A_p 与 $\varphi\in\mathscr{S}$ 无关. 至于这些估计的推广可参看 Stein[3]，第三、四章.

5.8 若 φ 是测试函数，则它的 Riesz 变换 $R_k\varphi$ 便是有界连续函数. 这是因为，经分部积分后，我们可以把 $R_k\varphi$ 表成测试函数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ 和 $c_n/(1-n)|x|^{n-1}$ 的卷积. 于是，当 μ 是 E_n 上的有限 Borel 测度时，积分 $\int_{E_n}(R_k\varphi)d\mu$ 就存在，并且可以用来把 μ 的 Riesz 变换 $\nu_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 定义为，对一切测试函数 φ，满足

$$\int_{E_n}\varphi\,d\nu_k=-\int_{E_n}(R_k\varphi)\,d\mu$$

的"测度". 这就把 μ 的 Riesz 变换定义成了缓变广义函数. 然而一般说来，ν_k, $k=1, 2, \cdots, n$, 不一定还是有限 Borel 测度. 实际上，第 4 节所建立的 H^p 空间理论可以用来证明古典 F. 和 M.

Riesz 变换的下述推广：

如果有限 Borel 测度 μ 的 Riesz 变换 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 还是有限 Borel 测度，那么，$\mu, \nu_1, \cdots, \nu_n$ 对 Lebesgue 测度就都是绝对连续的(见 Stein 和 G. Weiss[1]. 这个结果的推广可参看 Stein[3]，第七章).

5.9 一个 M. Riesz 方程组(§4 中引入的)可以认为是一个调和函数 $\nabla h=F=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 当 F 的定义域是单连通时的梯度. 事实上，(4.13)中的第二个方程组正是函数 h(h 的梯度是 F)存在的条件，而第一个方程保证 h 的 Laplace 运算是 0. 通过考虑每个分量 u_j 的梯度 $\nabla u_j=(u_{j1}, u_{j2}, \cdots, u_{jn})$, $j=1, 2, \cdots, n$, 可得 n^2 元组 $F^{(2)}=(u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{nn})$，我们称它为 h 的第二阶梯度. 我们可以再对 $F^{(2)}$ 的每个分量施行这一运算，而得到 h 的第三阶梯度. 这样继续下去，就得到 h 的第 k 阶梯度 $F^{(k)}$. Calderón 和 Zygmund[6] 已经证明了 $|F^{(k)}|^p$ 在 $p\geqslant(n-2)/(k+n-2)$ 时是次调和的. 于是考虑由那些第 k 阶梯度——E_{n+1}^+ 上的调和函数系——组成的 H^p 空间，就得到对指标 $p\geqslant(n-1)/(k+n-1)$ 的边界值性质(4.3)和(4.4)(注意，定义域的维数是 $n+1$). 这就是说，我们对任意接近于零的指标 p，得到了一个 H^p 空间定理.

这里有一类与正交群 $SO(n)$ 之不可约表达式紧密联系着的广义 Cauchy-Riemann 方程组. 第 k 阶梯度可以看作是这一类 GCR 方程组的解. 详见 Stein 和 G. Weiss[4].

5.10 本章所述的奇异积分理论，都是以 $K(x)=\Omega(x)/|x|^n$ 为核，其中 Ω 是齐次函数并在单位球面 Σ_{n-1} 上满足某些积分条件，特别地，$\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega(x')dx'=0$. 这些核是 Calderón 与 Zygmund 在[3]中最早研究的. 后来 Cotlar[1] 和 Hörmander[1] 指出，对其叙述不做大的变动，就可以应用到更一般的核 K 上. 最广泛的一类核是由这样的广义函数 K 组成，它们在原点以外局部可积，并满足 (1) $\hat{K}(x)$ 有界(这里 $\hat{K}$ 是 K 的在缓变广义函数意义下的 Fourier 变换)；(2)对一切 $y\in E_n$，有

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx \leqslant A < \infty.$$

(见 Stein[3], 第二章).

这种方法的优点是，它对 $L^1(E_n)$ 也给出了结果，特别是导出了“Hilbert 变换是弱 (1.1) 型”这一结果的推广 (见本书第五章引理2.8).

文献注释

为进一步讨论 Hilbert 变换，可参看 Titchmarsh[2]，Zygmund[1] 和 Loomis [1]. 第2节中所讨论的旋转变换的方法，首先由 Calderón 和 Zygmund [4] 提出. 要了解 Riesz 变换的更进一步的性质，可看 Hörvath [1]. 空间 $H^p(E^+_{n+1})$ 是由 Stein 和 G. Weiss [1] 引入的. 共轭调和函数系也是由 Calderón 和 Zygmund [6]，Stein 和 G. Weiss [4]，Kuran [1] 以及 Coifman 和 G. Weiss [2] 研究过的. Calderón 发现了椭圆方程组的调和解 F 的一个性质，即对某 $p<1$，$|F|^p$ 是次调和的.

第七章　多重 Fourier 级数

本章的目的是要简单介绍一下多重 Fourier 级数理论的一些内容．按抽象的观点来看，它只是 Fourier 分析在紧 Abel 群上的一个特例，而我们是要强调在 n 维圆环面上和在 n 维欧氏空间上的分析之间的联系．因此，在第 2 节中我们考虑 E_n 上函数的"周期化"过程，它给出了 Poisson 求和公式，在第 3 节中，相应地考虑乘子算子的周期化．在第 4、5 节中，讨论另一专题——多重 Fourier 级数的可求和问题．我们之所以在现在研究这个课题，而不早在非周期问题时讨论(在那里，许多类似的结果都可得到证明)，主要是为了使我们的论述更为完美和恰当．所给出的这些结果只是对 $n>1$ 时成立，而且是用与处理较熟悉的一维情形的类似问题不同的方法得到的．

§1　基本性质

设 Λ 表示由 E_n 中的整坐标点组成的加法群(当然，其加法是按 E_n 的向量加法)，并称 Λ 为单位格．我们考虑陪集空间 E_n/Λ，且按通常的办法视 E_n/Λ 上的函数与 E_n 上的周期函数等同．更明确地说，当 $m\in\Lambda$ 时，满足 $f(x+m)=f(x)$ 的函数等同于在由 x 确定的陪集上之值为 $f(x)$ 的函数．Λ 的元素就是这些函数的周期．

E_n/Λ 自然等同于 n 维圆环面 $T_n=\{(e^{2\pi ix_1},e^{2\pi ix_2},\cdots,e^{2\pi ix_n})\in C^n:(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)\in E_n\}$．这个等同是由映射 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\to(e^{2\pi ix_1},\ e^{2\pi ix_2},\ \cdots,\ e^{2\pi ix_n})$ 给出的，且由它可以得到 E_n 上周期函数与 n 维环面上函数的标准等同．

一个集合 $D\subset E_n$，如果对 E_n 的每一个点，恰有一个关于 Λ 的

平移在 D 中，则称 D 是基本域. 显然，E_n 上的一个周期函数是由它在一个基本域上的限制唯一确定的. 自然，存在着无穷多个基本域，而对我们来说既简单又合适的基本域就是基本立方体 $Q_n=\{x\in E_n: -1/2\leqslant x_j\leqslant 1/2,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. T_n 上的积分可以用 Q_n 上的 Lebesgue 积分来定义：当 f 是 T_n 上的函数时，我们令

$$\int_{T_n} f dx=\int_{Q_n} f dx, \tag{1.1}$$

并把它做如下解释：任何一个 T_n 上的函数 f，正如我们所指出过的，可产生一个 E_n 上的周期函数，该周期函数在 Q_n 上的限制就是出现在(1.1)右端的函数. 我们称 T_n 上的函数 f 是可测的，如果它所相应的 Q_n 上的函数是 Lebesgue 可测的. 再若 Q_n 上的相应函数是可积的，则(1.1)左端的积分就定义为等于右端的积分. 同理，T_n 上的 L^p 空间等同于 Q_n 上的 L^p 空间. 类似地，我们也可以认为 T_n 上的有限 Borel 测度类与把测度集中于基本立方体 Q_n 上的有限 Borel 测度类等同，并用符号 $L^p(T_n)$，$\mathscr{B}(T_n)$ 分别表示 T_n 上的 L^p 空间和 T_n 上的 Borel 测度. 但我们应该指出，T_n 上的连续函数类 $C(T_n)$ 并不相应于 Q_n 上的连续函数类，而只相应于当把 Q_n 上函数做周期延拓时，仍在 E_n 上保持连续性的函数类. $C(T_n)$ 是 $L^\infty(T_n)$ 的 Banach 子空间(即把 $C(T_n)$ 赋予 L^∞ 范数). 这里我们复述一下基本的包含关系

$$\mathscr{B}(T_n)\supset L^p(T_n)\supset C(T_n),$$

并指出，通常可以把 $L^1(T_n)$ 看作等同于 $\mathscr{B}(T_n)$ 的绝对连续测度的子空间.

现在我们来讨论 T_n 中测度和函数的 Fourier 级数. 对于每个元素 $\mu\in\mathscr{B}(T_n)$，我们设 Fourier 级数为

$$d\mu\sim\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}, \tag{1.2}$$

其中

$$a_m=\int_{T_n} e^{-2\pi i m\cdot x} d\mu(x) \tag{1.3}$$

是 $d\mu$ 的 Fourier-Stieltjes 系数.

为利于形式上计算 Fourier 系数，较为方便的是对每个 $\mathscr{B}(T_n)$ 中的测度 μ，考虑定义在 $C(T_n)$ 上的连续线性泛函

$$(1.4) \qquad L_\mu: f \to \int_{T_n} f d\mu.$$

反之，按照 Riesz-Markov 表示定理，我们知道，每一个 $C(T_n)$ 上的连续线性泛函，对某一 $\mu \in \mathscr{B}(T_n)$ 都是(1.4)型的，且 $\|L_\mu\| = \|d\mu\|$，其中等式左端的范数是线性泛函 L_μ 的范数，而等式右端的范数是 μ 的全测度. 这就使我们很容易定义 $\mathscr{B}(T_n)$ 中两个测度 μ_1 和 μ_2 的卷积. μ_1 和 μ_2 的卷积是一个测度 μ，它(通过(1.4))表示了线性泛函

$$(1.5) \qquad f \to \int_{T_n} f\, d\mu = \int_{T_n} \int_{T_n} f(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

根据这个定义，显然有 $\|d\mu\| \leqslant \|d\mu_1\| \|d\mu_2\|$，并且 $\mathscr{B}(T_n)$ 对这个卷积运算是一个可交换的 Banach 代数. 如果我们在(1.5)中令 $f(x) = e^{-2\pi i m \cdot x}$，就得到乘法公式

$$(1.6) \qquad d\mu_1 * d\mu_2 \sim \sum_{m \in \Lambda} a_m b_m e^{2\pi i m \cdot x},$$

这里，$\{a_m\}$ 和 $\{b_m\}$ 分别是 $d\mu_1$ 和 $d\mu_2$ 的 Fourier-Stieltjes 系数.

粗略地考察一下(1.5)，还可以导出 $d\mu_1 * d\mu_2$ 的另一个定义. 它就是测度 μ，具有性质

$$\mu(E) = \int_{T_n} \mu_1(E-y) d\mu_2(y),$$

其中 E 是任一 Borel 集. 由此，当 μ_1(或 μ_2)绝对连续时，μ 显然也是绝对连续的. 然而我们知道，当且仅当 μ_1 有 Radon-Nikodym 导数 $f \in L^1(T_n)$ 时，测度 μ_1 是绝对连续的. 这时，μ 的 Radon-Nikodym 导数就是函数 h:

$$h(x) = \int_{T_n} f(x-y) d\mu_2(y).$$

按照 Fubini 定理，这个积分对几乎每个 x 绝对收敛. 如果 μ_2 也是绝对连续的，且其 Radon-Nikodym 导数 $g \in L^1(T_n)$，则

$$h(x) = \int_{T_n} f(x-y) g(y) dy.$$

于是我们看出，$L^1(T_n)$承袭了$\mathscr{B}(T_n)$的卷积结构. 特别地，乘法公式(1.6)对 L^1 函数也是成立的.

为了给出关于 Fourier 展开完备性的基本公式，我们可以把任何有限和 $\sum a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 称作是一个三角多项式.

定理1.7 (i) 三角多项式在$C(T_n)$和 $L^p(T_n)$ 中稠密，$1\leqslant p<\infty$.

(ii) 假设对某个 $\mu\in\mathscr{B}(T_n)$, $\int_{T_n} e^{-2\pi i m\cdot x}d\mu(x)=0$ 对一切 $m\in\Lambda$ 成立，则 $\mu=0$.

(iii) 设$f\in L^2(T_n)$, $f\sim\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$, 则

$$\sum_{m\in\Lambda}|a_m|^2=\|f\|_2^2,$$

且对应关系 $f\leftrightarrow\{a_m\}=\left\{\int_{T_n}e^{-2\pi i m\cdot x}f(x)dx\right\}$ 是 $L^2(T_n)$到 $l^2(\Lambda)$ 上的酉映射.

证明 由于三角多项式组成一个代数，它离析出 n 维环面的点，这个代数包含有常数，并对复共轭运算封闭，所以我们可以应用 Stone-Weierstrass 定理来得到三角多项式在 $C(T_n)$中的稠密性. 由这个逼近性质再加上 $C(T_n)$在 $L^p(T_n)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 的稠密性，就推出三角多项式在 $L^p(T_n)$中相应的逼近性质.

为证明(ii)，我们注意到，性质"$\int_{T_n}e^{-2\pi i m\cdot x}d\mu(x)=0$ 对一切 $m\in\Lambda$ 成立"等价于

$$\text{“}\int_{T_n}p(x)d\mu(x)=0$$

对每个三角多项式 p 成立". 而由(i)就能推出 $\int_{T_n}f(x)d\mu(x)=0$ 对一切$f\in C(T_n)$成立. 从而推出 $\mu=0$.

给定 $f\in L^2(T_n)$，若 N 为一正整数，那么，当 a_m 是 f 的 Fourier 系数 $\int_{T_n}e^{-2\pi i m\cdot x}f(x)dx$ 时，$\|f-\sum_{|m|<N}a_m e^{2\pi i m\cdot x}\|_2$ 的下确界是可以达到的. 众所周知，这个论断是由函数系$\{e^{2\pi i m\cdot x}\}$的相互正交性和正规性(按 L^2 范数)推出的. 由于每个$f\in L^2(T_n)$ 可

以用三角多项式逼近，所以我们知道 $\lim_{N\to\infty}\|f-\sum_{|m|\leqslant N}a_m e^{2\pi i m\cdot x}\|_2=0$. 因而，当 $N\to\infty$ 时，

$$\|f\|_2-\|\sum_{|m|\leqslant N}a_m e^{2\pi i m\cdot x}\|_2\to 0,$$

故 $\|f\|_2=(\sum_{m\in\Lambda}|a_m|^2)^{1/2}$. 这就表明映射 $f\to\{a_m\}$ 是等距的. 如果它还是映上的，则这个映射一定是酉映射. 事实上，若给定 $\{a_m\}$, $\sum_{m\in\Lambda}|a_m|^2<\infty$, 并设 $s_N(x)=\sum_{|m|\leqslant N}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$, 显然当 $N_1<N_2$ 时，有 $\|s_N-s_{N_2}\|_2=(\sum_{N_1<|m|\leqslant N_2}|a_m|^2)^{1/2}$. 所以 $\{s_N\}$ 是 $L^2(T_n)$ 中的 Cauchy 列. 于是它依范数收敛于某个函数 $f\in L^2(T_n)$. 又因

$$a_m=\int_{T_n}s_N(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx,\quad |m|\leqslant N,$$

所以有 $\quad a_m=\int_{T_n}f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx,\quad$ 对一切 $m\in\Lambda$.

这就证明了(iii)，因而定理得证. 】

我们现在来推导这一定理的几个有用的推论.

推论 1.8 设 $f\in L^1(T_n)$, $\sum_{m\in\Lambda}|a_m|<\infty$, 其中 $\{a_m\}$ 是 f 的 Fourier 系数，那么，可以在一个零测度集上适当修改 f 的值，使之属于 $C(T_n)$, 并在一切 $x\in T_n$ 上，等于 $\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$.

证明 从假设可推知，值为 $f(x)-\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 的函数之 Fourier 系数为 0. 于是由定理 1.7 之(ii)，这个函数必定几乎处处为 0. 】

当 k 是一正整数时，函数类 $C^{(k)}(Q_n)(=C^{(k)}(T_n))$ 是由一切 E_n 上属于 $C^{(k)}=C^{(k)}(E_n)$ 类的周期函数[1] 在 Q_n 上的限制所组成.

---

1) 即指当 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是一个 n 重非负整数组，且满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant k$ 时，处处有连续导数 $D^\alpha f$ 的那些周期函数 f. 回想在第一章中，算子 D^α 定义为

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

我们提醒读者，在第一章里，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 记作 $|\alpha|$，而在定理 1.7 的证明中，我们用 $|m|$ 表示格点 m 的欧氏范数. 为避免混淆，我们在这里不使用第一章引入的记号 $|\alpha|$.

推论 1.9 设 $f\in C^{(k)}(T_n)$, $k>n/2$, 则 $\sum\limits_{m\in\Lambda}|a_m|<\infty$, 这里 $\{a_m\}$是 f 的 Fourier 系数.

证明. 在第一章里, 对 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E_n$ 和 n 重非负整数组 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 我们定义 x^α 为数 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ (我们也按惯例约定 $0^0=1$). 按照这个记法并进行分部积分, 我们得到, 当 $f\in C^{(k)}(T_n)$, 且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant k$ 时, 有

$$\int_{T_n}(D^\alpha f)(x)e^{-2\pi i m\cdot x}\,dx=(2\pi i m)^\alpha\int_{T_n}f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}\,dx$$

$$=(2\pi i m)^\alpha a_m.$$

因 $D^\alpha f$ 是连续的, 它必定属于 $L^2(T_n)$, 则由定理 1.7 之(iii), 有

$$(1.10)\qquad \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\{\sum_{m\in\Lambda}|a_m|^2[(2\pi m)^\alpha]^2\}<\infty.$$

此外, 经简单计算可知, 存在一个只依赖于维数 n 和 k 的常数 $c=c(k, n)$, 使得

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}[(2\pi m)^\alpha]^2\geqslant c|m|^{2k}.$$

于是利用 Schwarz 不等式, 可得

$$\sum_{|m|>0}|a_m|\leqslant\sum_{|m|>0}|a_m|(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}[(2\pi m)^\alpha]^2)^{1/2}c^{-1/2}|m|^{-k}$$

$$\leqslant(\sum_{|m|>0}|a_m|^2\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}[(2\pi m)^\alpha]^2)^{1/2}(\sum_{|m|>0}|m|^{-2k})^{1/2}c^{-1/2}.$$

当 $k>n/2$ 时, 和式 $\sum\limits_{|m|>0}|m|^{-2k}$ 是有限的. 因此, 借助于不等式(1.10), 这最后的表达式也是有限的. 推论得证. ▌

推论 1.11 若 $f\in L^1(T_n)$, 且 $f\sim\sum\limits_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$, 则当 $|m|\to\infty$ 时, $a_m\to 0$.

证明 首先设 $f\in L^2(T_n)$. 这时 $a_m\to 0$ 就是 $\sum\limits_{m\in\Lambda}|a_m|^2<\infty$ 的直接结果(见定理 1.7之(iii)). 对于一般的 $f\in L^1(T_n)$, 我们给定 $\varepsilon>0$, 可以找到 f_1 和 f_2, $f_1\in L^2(T_n)$, $\|f_2\|_1<\varepsilon$, 使 $f=f_1+f_2$. 于是, 若 $\{a_m^{(j)}\}$ 表示 f_j 的 Fourier 系数, 我们就有 $\lim\limits_{|m|\to\infty}a_m^{(1)}=0$ 和 $|a_m^{(2)}|\leqslant\|f_2\|_1<\varepsilon$. 这样, $\limsup\limits_{|m|\to\infty}|a_m|\leqslant\varepsilon$, 其中 $a_m=a_m^{(1)}+a_m^{(2)}$

$(m\in\Lambda)$是f的 Fourier 系数. 又因 $\varepsilon>0$ 是任意的, 这就证明了推论. 】

§2 Poisson 求和公式

我们不再去一步步地建立 Fourier 级数与 Fourier 积分相类似的性质, 而着手讨论本章的主要问题. 我们可以一般地提出这个问题: 若给定一个关于 E_n 的函数空间的"元素"(例如, 一个 E_n 上的函数, 一个作用在 E_n 的函数上的算子, 等等), 它的周期模拟是什么? 也就是说, 在 n 维环面 T_n 上的相应"元素"是什么? 我们还感兴趣的是, 如何能从已建立的非周期形式中的性质, 导出这一相应"元素"在周期形式下的性质.

我们首先对定义在 E_n 上的函数来讨论这些问题. 为了对所讨论的问题有一个更好的理解, 我们暂不去管所有的收敛性问题, 而仅做形式上的论述.

设 f 是 E_n 上某个(适当的)函数, 至少有两种办法可以从 f 得到一个周期函数. 第一种办法是初等的, 且不涉及 Fourier 分析. 我们简单写为

$$\sum_{m\in\Lambda} f(x+m). \tag{2.1}$$

由于它遍及 Λ 的一切格点来(形式上)求和, 显然它是周期的(因为从 x 移到 $x+m'$ 时, 在(2.1)中只是置换了各项). 我们把从 f 过渡到和式(2.1)称为 f 的周期化.

为了给出第二种方法, 我们记

$$f(x)\sim\int_{E_n}\hat{f}(y)e^{2\pi ix\cdot y}\,dy, \tag{2.2}$$

它就是 Fourier 逆变换公式, 其中,

$$\hat{f}(y)=\int_{E_n}f(x)e^{-2\pi ix\cdot y}\,dx.$$

这时, f 的(由(2.2)给出的)周期模拟就是

$$\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m)e^{2\pi ix\cdot m}. \tag{2.3}$$

Poisson 求和公式的主要效力是说明，由(2.1)和(2.3)给出的得到 f 的周期模拟的两种方法基本上是等同的．这个结论可以有很多种方式精确地表述，其中最简单最直接的叙述如下：

定理 2.4 设 $f\in L^1(E_n)$，则级数 $\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)$ 按 $L^1(Q_n)(=L^1(T_n))$ 范数收敛，其在 $L^1(T_n)$ 中的极限函数有 Fourier 展开：

$$\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m)e^{2\pi ix\cdot m}. \tag{2.5}$$

这就意味着 $\{\hat{f}(m)\}$ 是由 $\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)$ 定义的 L^1 函数的 Fourier 系数，其中，对任何 $y\in E_n$，有

$$\hat{f}(y)=\int_{E_n}f(x)e^{-2\pi iy\cdot x}dx.$$

证明 设 Q_n-m 是由格点 m 给出的 Q_n 的平移，我们有

$$\int_{Q_n}\left|\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)\right|dx\leqslant\sum_{m\in\Lambda}\int_{Q_n}|f(x+m)|dx$$
$$=\sum_{m\in\Lambda}\int_{Q_n-m}|f(x)|dx.$$

由于基本立方体 Q_n 是基本定义域，所以平移 Q_n-m 是互不相交的，并且它们的并就是 E_n．于是

$$\sum_{m\in\Lambda}\int_{Q_n-m}|f(x)|dx=\int_{E_n}|f(x)dx<\infty.$$

这就表明级数 $\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)$ 按 $L^1(Q_n)$ 范数(绝对)收敛．同样利用求和与积分的换序，我们可以算出 $\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)$ 的 Fourier 系数．事实上，

$$\int_{Q_n}\left(\sum_{m'\in\Lambda}f(x+m')\right)e^{-2\pi im\cdot x}dx$$
$$=\sum_{m'\in\Lambda}\int_{Q_n-m'}f(x)e^{-2\pi im\cdot x}dx$$
$$=\int_{E_n}f(x)e^{-2\pi i\cdot mx}dx=\hat{f}(m).$$

上面关于 L^1 收敛性的论证还表明，换序是有根据的，因而就证明了 $\sum_{m'\in\Lambda}f(x+m')$ 有 Fourier 展开(2.5)． ∎

下面的推论是定理 2.4 的特殊情形，它是很有用的.

推论 2.6 设 $\hat{f}(y)=\int_{E_n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot y}dx$, 且

$$f(x)=\int_{E_n} \hat{f}(y)e^{2\pi i x\cdot y}dy,$$

其中 $|f(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}$, $|\hat{f}(y)|\leqslant A(1+|y|)^{-n-\delta}$, $\delta>0$(这样，f 和 $\hat{f}$ 都可假定是连续的). 那么，

$$\sum_{m\in\Lambda} f(x+m)=\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}, \tag{2.7}$$

并且特别有

$$\sum_{m\in\Lambda} f(m)=\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m). \tag{2.8}$$

这里，(2.7)和(2.8)中的四个级数都绝对收敛[2].

证明 由于我们对 $\hat{f}$ 的假定，Fourier 级数

$$\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

绝对收敛. 所以，按照推论 1.8 和定理 2.4，我们可以在零测度集上修改函数 $\sum_{m\in\Lambda} f(x+m)$ 的值，使它处处等于一个连续函数 $\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$. 但是，与 $\sum_{m\in\Lambda}(1+|m|)^{-n-\delta}$ 比较，我们就看出 $\sum_{m\in\Lambda} f(x+m)$ 是一个一致收敛级数，且它的各项都是连续函数. 因而它的和也是连续的. 所以(2.7)对每个 x 成立. ∎

我们现在举两例说明如何能使用 Poisson 求和公式. 第一个例子是第一章中考虑过的 Fourier 反演问题的模拟. 就是说，我们要问，当 $f\in L^1(T_n)$, $a_m=\int_{T_n} f(x)e^{-2\pi i m\cdot x}dx$ 时，在什么范围，级数

$$\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

可求和于 $f(x)$. 从第一章的观点看来，我们自然试图以极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)a_m e^{2\pi i m\cdot x} \tag{2.9}$$

2) 我们称(2.8)为 Poisson 求和公式，我们也用这一名称称呼(2.7)，且更一般地用此称呼定理 2.4.

来代替上面的和式，其中 Φ 是一个适当的连续函数，且 $\Phi(0)=1$. 由于推论 2.6 的启发，我们对 Φ 做以下假定：

$$
(2.10)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ \ \Phi(y)=\hat{\varphi}(y),\text{其中}\int_{E_n}\varphi(x)dx=1; \\ \text{(ii)}\ \ \text{对某}\ \delta>0,\ |\Phi(y)|\leqslant A(1+|y|)^{-n-\delta}, \\ \qquad |\varphi(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}. \end{cases}
$$

定理 2.11 设 Φ 满足条件 (2.10)，$f\in L^p(T_n)$，且 $f\sim\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$，则

(a) 当 $1\leqslant p<\infty$，极限(2.9)按 $L^p(T_n)$ 范数收敛于 f；

(b) 当 $f\in C(T_n)$ 时，极限(2.9)一致收敛于 f；

(c) 对任一 $f\in L^1(T_n)$，在 f 的 Lebesgue 点集的每个点 x 上，极限(2.9)收敛于 f(因而是几乎处处收敛).

证明 记 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$，$\Phi^\varepsilon(y)=\Phi(\varepsilon y)$，$\varepsilon>0$. 则我们得知，$\Phi^\varepsilon=(\varphi_\varepsilon)\hat{}$. 而且，由于(2.10)，$\varphi_\varepsilon$ 和 Φ^ε 满足推论 2.6 的条件，故有

$$
(2.12)\qquad \sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)e^{2\pi i m\cdot x}=\sum_{m\in\Lambda}\varphi_\varepsilon(x+m).
$$

若用 $K_\varepsilon(x)$ 表示(2.12)之右端，则可得

$$
(f*K_\varepsilon)(x)=\sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)a_m e^{2\pi i m\cdot x},
$$

其中卷积是在第 1 节引入的(特别参看(1.6)). 根据我们对 Φ 的假定，上述最后的级数绝对收敛. 另一方面，有

$$
\int_{T_n}|K_\varepsilon(x)|dx\leqslant\int_{Q_n}\sum_{m\in\Lambda}|\varphi_\varepsilon(x+m)|dx
$$

$$
=\int_{E_n}|\varphi_\varepsilon(x)|dx=\int_{E_n}|\varphi(x)|dx.
$$

由于 $\|f*K_\varepsilon\|_p\leqslant\|f\|_p\|K_\varepsilon\|_1$ (这里，范数都是空间 $L^p(T_n)(1\leqslant p\leqslant\infty)$的范数)，我们看出，映射

$$
M_\varepsilon:\ f\to\sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)a_m e^{2\pi i x\cdot m}
$$

作为 $L^p(T_n)$ 上的算子，对 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 是一致有界的. 又依 Φ 的连续性和 $\int_{E_n}\varphi(x)dx=1$，我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\Phi(\varepsilon m)=1$，因而只要 f 是三角多

项式，当 $\varepsilon\to 0$ 时就有 $M_\varepsilon f\to f$（按 L^p 范数）. 最后根据三角多项式在 $L^p(T_n)$ 中（$p<\infty$）和在 $C(T_n)$ 中的稠密性，以及我们刚才证明的一致有界性，定理的(a)和(b)就可得到证明.

在证明(c)以前，我们先应说明，在 f 被周期延拓后，如果 x 是 E_n 上延拓了的周期函数的 Lebesgue 集的点，我们就说 x 是 f 的 Lebesgue 点. 显然，经适当的平移，我们可以使 x 成为原点（它是基本立方体 Q_n 的中心）. 设

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in Q_n; \\ 0, & \text{当 } x\in E_n-Q_n. \end{cases}$$

因为函数的 Lebesgue 点的性质是局部的，所以 0 也是 $\tilde{f}$ 的 Lebesgue 集的点. 现在

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)a_m &= \int_{Q_n} f(x)K_\varepsilon(-x)dx \\ &= \sum_{m\in\Lambda}\int_{Q_n} f(x)\varphi_\varepsilon(-x+m)dx \\ &= \int_{Q_n} f(x)\varphi_\varepsilon(-x)dx+\sum_{m\neq 0}\int_{Q_n} f(x)\varphi_\varepsilon(-x+m)dx.\end{aligned}$$

根据对 φ 的假定，若 $x\in Q_n$，且 $|m|\geqslant 1$，则有

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon(-x+m)| &\leqslant A\left(1+\left|\frac{-x+m}{\varepsilon}\right|\right)^{-n-\delta}\varepsilon^{-n} \\ &= \varepsilon^\delta A(\varepsilon+|-x+m|)^{-(n+\delta)}\leqslant \varepsilon^\delta A'|m|^{-(n+\delta)}.\end{aligned}$$

所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\left|\sum_{m\neq 0}\int_{Q_n} f(x)\varphi_\varepsilon(-x+m)dx\right|\leqslant \varepsilon^\delta A''\int_{Q_n}|f(x)|dx\to 0;$$

同时，有 $\displaystyle\int_{Q_n} f(x)\varphi_\varepsilon(-x)dx=\int_{E_n}\tilde{f}(x)\varphi_\varepsilon(-x)dx.$

而条件 $|\varphi(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}$ 使我们能对这最后的积分应用第一章定理 1.25，并且得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_n}\tilde{f}(x)\varphi_\varepsilon(-x)dx=\tilde{f}(0)=f(0).$$

这就证明了(c). 因而定理 2.11 证毕. ∎

这里有必要分别提出这个定理的两个特殊情形. 第一个情

形，我们考虑 $\varphi(x)=c_n(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}$. 那么，$\Phi(y)=e^{-2\pi|y|}$（见第一章定理 1.14）. 这时，(2.9) 中的级数变成（若用 t 代替 ε）

$$(2.13)\qquad \sum_{m\in\Lambda} e^{-2\pi|m|t}a_m e^{2\pi i m\cdot x}.$$

这一级数对 $t>0$ 绝对收敛，并被称为 f 的 Poisson（或 Abel-Poisson）积分. 它就是 f 与 Poisson 核

$$P_t(x)=\sum_{m\in\Lambda} e^{-2\pi|m|t}e^{2\pi i m\cdot x}$$

的卷积. 由 (2.12) 可推出，当 $t>0$, $x\in Q_n$ 时，$P_t(x)\geqslant 0$. 此外，

$$\int_{Q_n} P_t(x)=\int_{Q_n} 1dx+\int_{Q_n}\sum_{m\neq 0} e^{-2\pi|m|t}e^{2\pi i m\cdot x}dx$$
$$=1+0=1.$$

第二个例子是

$$\Phi(y)=\begin{cases}(1-|y|^2)^\alpha, & \text{当 } |y|\leqslant 1;\\ 0, & \text{当 } |y|>1\end{cases}$$

的情况. 由第四章定理 4.15. 我们有

$$\varphi(x)=\hat{\Phi}(x)=\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)|x|^{-(n/2)-\alpha}J_{(n/2)+\alpha}(2\pi|x|).$$

于是，当 $\alpha>(n-1)/2$ 时，从第四章引理 3.11 推知，Φ（以及 φ）满足假设 (2.10). 故此时可得 Riesz 平均[3]

$$(2.14)\qquad \lim_{R\to\infty}\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x},\qquad \alpha>\frac{n-1}{2},$$

的适当的收敛性. 综上所述，归结如下：

推论 2.15 对于 Abel-Poisson 平均 (2.13) 和对于 α 大于临界指标时的 Riesz 平均 (2.14)，定理 2.11 的结论成立.

阶数不大于临界指标的 Riesz 平均的处理方法较复杂，我们将在第 4、5 节中讨论.

我们刚才给出的 Poisson 求和公式的应用涉及到正则化算子的周期模拟，这种算子是在 Fourier 反演问题中提出来的. Poisson 求和公式的第二个应用是一种典型情形，在那里，可用 Poisson 求和公式对各种初等（周期）函数进行精确估计.

---

3) 使函数 Φ 和 $\varphi=\hat{\Phi}$ 满足 (2.10) 的值 α 的下界 $(n-1)/2$ 叫做临界指标（对 Riesz 平均 (2.14) 收敛性的临界指标）.

在第四章中我们曾研究过（见定理 4.1），若 α 是满足 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$ 的复数，$f(x)=|x|^{\alpha-n}$，则 $\hat{f}(x)=\gamma_\alpha|x|^{-\alpha}$，其中 $\gamma_\alpha=\pi^{-\alpha+n/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma[(n-2)/2]$. 假如不顾所有收敛性问题而应用等式(2.7)，我们就会得出

$$(2.16)\qquad \gamma_\alpha^{-1}\sum_{m\in\Lambda}|x+m|^{\alpha-n}=\sum_{m\in\Lambda}|m|^{-\alpha}e^{2\pi im\cdot x}.$$

这个关系是不可能成立的，因为右端相应于 $m=0$ 的项是无穷大，左端的级数又发散. 但是做适当修改后，Poisson 求和公式就可以在这里应用了. 一种应用办法是要涉及 Riemann Zeta 函数的泛函方程及其某些推广，这将在(6.3)中讨论. 下述定理给出(2.16)的另一种解释.

定理 2.17 设 $0<\mathrm{Re}(\alpha)<n$. 则级数 $\sum\limits_{|m|>0}|m|^{-\alpha}e^{2\pi im\cdot x}$ 是 Q_n 上一个可积函数的 Fourier 级数，这个函数属于 $Q_n-\{0\}$ 上的 C^∞ 类，且在原点处，这个函数与值为 $\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n}$ 的函数有相同的奇异性. 就是说

$$\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n}+b(x)\sim\sum_{|m|>0}|m|^{-\alpha}e^{2\pi im\cdot x},\ x\in Q_n,$$

这里，$b\in C^\infty(Q_n)$.

证明 取一个函数 η 具有下列性质：$\eta\in C^\infty(E_n)$，$\eta(x)$ 在 $|x|\geqslant1$ 时为 1，在原点的一个邻域中为 0. 定义 $F(x)=\eta(x)|x|^{-\alpha}$，$x\in E_n$. 我们断言，存在一个函数 $f\in L^1(E_n)$，使得

(1) $\hat{f}=F$,

(2) $f(x)=\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n}+b_1(x)$，其中 $b_1\in C^\infty(E_n)$,

(3) 对于每个 n 重非负整数组 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 和每一个正整数 N，当 $|x|\to\infty$ 时，有 $|D^\beta f(x)|=O(|x|^{-N})$.

事实上，将 $F(x)$ 写成 $F(x)=|x|^{-\alpha}+(\eta(x)-1)|x|^{-\alpha}$，并设 f 是 F 在缓变广义函数意义下的 Fourier 逆变换. 那么，由第四章(4.1)可知 $f(x)=\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n}+b_1(x)$，这里 $b_1(x)$ 是一个可积函数的 Fourier 逆变换，这个可积函数有有界支集，其值为 $(\eta(x)-1)|x|^{-\alpha}$. 所以 $b_1\in C^\infty(E_n)$，而且性质(1)、(2)得证. 又因 f 是 F 的 Fourier 逆变换，对于任一 n 重非负整数组 β 来说，

$-(2\pi ix)^{\beta}f(x)$就是 $D^{\beta}F$ 的 Fourier 逆变换(见第一章定理 1.8). 注意, 如果偏导数 $D^{\beta}F$ 的阶足够大 $(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n>n-\mathrm{Re}(\alpha))$, 就有 $D^{\beta}F\in L^1(E_n)$, 因而这时 $-(2\pi ix)^{\beta}f(x)$ 是有界的. 这就证明了当 $|x|\to\infty$ 时, $|f(x)|=O(|x|^{-N})$. 性质(3)的其余部份也可以用同样的办法证明. 另外, 从(2)和刚才证明的结论 $|f(x)|=O(|x|^{-N})$ $(|x|\to\infty)$, 可推出 $f\in L^1(E_n)$.

下面, 把定理 2.4 给出的变形的 Poisson 求和公式应用到我们上面构造的函数 f 以及 $\hat{f}=F$ 上, 得到

$$\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)\sim\sum_{m\in\Lambda}F(m)e^{2\pi ix\cdot m}=\sum_{|m|>0}|m|^{-\alpha}e^{2\pi ix\cdot m}.$$

又由于

$$\sum_{m\in\Lambda}f(x+m)=f(x)+\sum_{|m|>0}f(x+m)$$

$$=\gamma_{\alpha}^{-1}|x|^{\alpha-n}+b_1(x)+\sum_{|m|>0}f(x+m),$$

取 $b(x)=b_1(x)+\sum_{|m|>0}f(x+m)$, 就证明了定理. 】

除级数 $\sum_{|m|>0}|m|^{-\alpha}e^{2\pi im\cdot x}$ 以外, 许多其它特殊的级数也可以用这种办法处理, 有一些将在(6.1)中介绍.

§3 乘子变换

我们曾在第一章中研究过由 $L^p(E_n)$ 映入 $L^q(E_n)$ 且与平移可交换的有界算子类, 并发现每个这种算子 T 实际上是由某一个缓增广义函数 u 确定的, u 对每个 $f\in\mathscr{S}$, 有 $Tf=u*f$. 我们对它取 Fourier 变换, 就得到$(Tf)^{\wedge}=\hat{u}\hat{f}$. 所以, 经过 Fourier 变换后, T 等价于一个算子, 它把每一测试函数映射成测试函数的 Fourier 变换与广义函数 $\hat{u}$ 的乘积. 一般来说, 我们对这种乘子 $\hat{u}$ 了解得还不太多, 然而当 $p=q$ 时, 我们能证明除了其它性质外, $\hat{u}$ 是有界可测函数. 第一章定理 3.18 说的就是当 $p=2=q$ 时, $\hat{u}$ 具有此性质. 如果 $p\neq 2$, 且对一切 $f\in\mathscr{S}$, $\|u*f\|_p\leqslant A\|f\|_p$, 那么从第一章定理 3.20 推出, 对一切 $f\in\mathscr{S}$, 有 $\|u*f\|_{p'}\leqslant A\|f\|_{p'}$

此处 $(1/p)+(1/p')=1$. 因为 2 必位于 p 与 p' 之间，故由 M. Riesz 插值定理(见第五章定理 1.3)知，算子 T: $f\to u*f$ 是(2, 2)型的. 因而 $\hat{u}$ 满足定理 3.18 的假设，从而是有界可测函数.

现在我们的目的是要在周期情形中研究类似的乘子算子，并对其中的一个重要的乘子类证明它们的性质是非周期变型的先验推论.

按照第一章的记号，我们规定，当 $p<\infty$ 时，(L^p, L^q) 表示由 $L^p(E_n)$ 到 $L^q(E_n)$ 的与平移可交换的有界算子 T 的全体（或等价地说，(L^p, L^q) 是如下缓变广义函数 u 的类：u 对某个 $A=A(u)$ 和一切 $\varphi\in\mathscr{S}$，满足 $\|u*\varphi\|_q\leqslant A\|\varphi\|_p$). 为了强调这些算子是作用于 E_n 上的函数的，我们现把这个类记作 $(L^p(E_n), L^q(E_n))$. 类似地，对于周期情形，我们引入一切有界算子 $\tilde{T}$ 的类 $(L^p(T_n), L^q(T_n))$ $\tilde{T}$ 是从 $L^p(T_n)$ 映入 $L^q(T_n)$、并与平移可交换的算子.

与非周期情形类似，我们可以使任何 $\tilde{T}\in(L^p(T_n), L^q(T_n))$ 等同于由一适当缓变广义函数确定的卷积(在 T_n 上). 但在这时，直接考虑算子会简单得多.

定理 3.1 设 $\tilde{T}\in(L^p(T_n), L^q(T_n))$, $1\leqslant p, q\leqslant\infty$. 则存在一个有界复值函数 λ: 在网格 Λ 上，$m\to\lambda(m)$，使得只要 $f\sim\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$，就有

$$\tilde{T}f\sim\sum_{m\in\Lambda}\lambda(m)a_m e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{3.2}$$

证明 令 $\psi_m(x)=(\tilde{T}e_m)(x)$，其中 $e_m(y)=e^{2\pi i m\cdot y}(m\in\Lambda)$. 于是 $\|\psi_m\|_q\leqslant A\|e_m\|_p=A$. 若用 τ_h 表示由 h 给出的平移变换(即对周期函数 f，就有 $(\tau_h f)(x)=f(x-h)$)，则由假设 $\tilde{T}\tau_h=\tau_h\tilde{T}$ 推出，对每个 $h\in Q_n$，有

$$\psi_m(x-h)=e^{-2\pi i m\cdot h}\psi_m(x)$$

对几乎一切 x 成立. 那么，由 Fubini 定理可知，若固定某个 $x(=x_0)$，则上式对几乎一切 $h\in Q_n$ 成立. 这就意味着对几乎每个 h，有 $\psi_m(h)=e^{2\pi i m\cdot h}e^{-2\pi i m\cdot x_0}\psi_m(x_0)$. 于是

$$\psi_m(x)=\lambda(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

对几乎一切 x 成立，其中 $\lambda(m)=e^{-2\pi im\cdot x_0}\psi_m(x_0)$. 而且 $|\lambda(m)|=|\lambda(m)|\|e_m\|_q=\|\lambda(m)e_m\|_q=\|\psi_m\|_q\leqslant A$. 通过函数系 $\{e_m\}$ 的有限线性组合，我们可得当 f 是三角多项式时，表达式(3.2)成立，再应用简单的极限手续，就可推广到对一切 $f\in L^p(T_n)$ 也成立. 定理得证. 】

由于有了定理 3.1，我们自然把变换 $\widetilde{T}\in(L^p(T_n),\ L^q(T_n))$ 称作**乘子算子**，把相应的序列 $\{\lambda(m)\}$ 称作**乘子**.

从这个定理和(1.7)之(iii)，可得到下列推论:

推论 3.3 $\widetilde{T}\in(L^2(T_n),\ L^2(T_n))$ 当且仅当 $\{\lambda(m)\}$ 是有界序列. 而且算子的范数 $\|\widetilde{T}\|=\sup\limits_{m\in\Lambda}|\lambda(m)|$.

至于 L^1 的情形则类似于第一章所说的非周期情形. 更确切地说，有以下结论:

定理 3.4 $\widetilde{T}\in(L^1(T_n),\ L^1(T_n))$ 当且仅当存在一个 T_n 上的有限 Borel 测度 μ，满足

$$d\mu\sim\sum_{m\in\Lambda}\lambda(m)e^{2\pi im\cdot x}. \tag{3.5}$$

此时，$\|d\mu\|=\|\widetilde{T}\|$.

证明 设 $\|\widetilde{T}f\|_1\leqslant A\|f\|_1$ 对一切 $f\in L^1(T_n)$ 成立，又对 $t>0$，令 $f_t(x)=P_t(x)=\sum\limits_{m\in\Lambda}e^{-2\pi|m|t}e^{2\pi im\cdot x}$. 我们曾经证明(参看(2.13)下面的讨论) $\|f_t\|_1=1$. 于是有

$$\|\widetilde{T}f_t\|_1=\int_{Q_n}\left|\sum_{m\in\Lambda}e^{-2\pi|m|t}e^{2\pi im\cdot x}\lambda(m)\right|dx\leqslant A.$$

因而我们可以找到一个趋于 0 的正数列 $\{t_n\}$，满足 $\{\widetilde{T}f_{t_n}\}$ 弱收敛于测度 μ. 即对每个 $g\in C(T_n)$，

$$\lim_{j\to\infty}\int_{T_n}\widetilde{T}f_{t_j}(x)g(x)dx=\int_{T_n}g(x)d\mu(x).$$

从而 $\|d\mu\|\leqslant A$. 特别有

$$\begin{aligned}\lambda(m)&=\lim_{j\to\infty}\int_{T_n}e^{-2\pi im\cdot x}\widetilde{T}f_{t_j}(x)dx\\&=\int_{T_n}e^{-2\pi im\cdot x}d\mu(x).\end{aligned}$$

故
$$d\mu\sim\sum_{m\in\Lambda}\lambda(m)e^{2\pi im\cdot x}.$$

其逆则是卷积算子的定义的直接推论（参看 (1.6) 及其下面的讨论）． 】

在建立了这些预备定理以后，我们转入本节所要讨论的主要问题．设 $T\in(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$．根据前面的讨论，我们可以认为 T 是一个乘子 $\hat{u}$，这里 $\hat{u}$ 是一个有界可测函数．一般来说，$\hat{u}$ 不是连续的，故 $\hat{u}$ 不必在网格 Λ 的点上定义．但是，假如 $\hat{u}$ 是在网格 Λ 的点上连续，而使 $\lambda(m)=\hat{u}(m)$ 在 Λ 上有定义，我们就可以问 $\{\lambda(m)\}$ 是否是类 $(L^p(T_n),\ L^p(T_n))$ 中的一个乘子．如果是的话，我们就说由算子 T 的周期化产生了对应的 n 维环面上的算子 $\tilde{T}$．

在列出一般定理之前，我们先来考察一些较为简单的特殊情形．在 $p=2$ 时，从 $\hat{u}$ 在 E_n 上有界并在 Λ 的点上连续，就推出 $\sup\limits_{m\in\Lambda}|\hat{u}(m)|=\sup\limits_{m\in\Lambda}|\lambda(m)|<\infty$．因而依推论 3.3，周期化了的算子就属于 $(L^2(T_n),\ L^2(T_n))$．至于 $p=1$ 的情形，我们知道 $\hat{u}(x)=\hat{\mu}(x)$，此处 $\hat{\mu}$ 是测度 $\mu\in\mathscr{B}(E_n)$ 的 Fourier 变换（见第一章定理 3.19）．那么，相应的周期化算子属于 $(L^1(T_n),\ L^1(T_n))$ 这一点就是定理 3.4 和下面事实的推论（这一事实亦可视为 Poisson 求和公式的另一种变化形式）：

定理 3.6 设 $\mu\in\mathscr{B}(E_n)$，$\hat{\mu}$ 是它的 Fourier 变换．则 $\sum\limits_{m\in\Lambda}\hat{\mu}(m)e^{2\pi im\cdot x}$ 就是 T_n 上一个测度 $\tilde{\mu}$ 的 Fourier 级数，而且 $\|d\tilde{\mu}\|\leqslant\|d\mu\|$．

证明 我们考虑把 $f\in C(T_n)$ 映入 $\int_{E_n}f(x)d\mu(x)$ 的线性泛函（这里，我们把 f 的周期延拓仍用 f 来表示）．根据 Riesz 表示定理，这个泛函可以认为是某个测度 $\tilde{\mu}\in\mathscr{B}(T_n)$．即

$$\int_{E_n}f(x)d\mu(x)=\int_{T_n}f(x)d\tilde{\mu}(x). \tag{3.7}$$

对 $f(x)=e^{-2\pi im\cdot x}$，$m\in\Lambda$，应用 (3.7)，就能证明定理 3.6． 】

由 (3.7) 可知，对任一 Borel 集 $E\subset Q_n$，都有 $\tilde{\mu}(E)=\sum_{m\in\Lambda}\mu(E+m)$. 于是,用类似于对函数引进的周期化的方法,我们从 μ 得出了一个测度 $\tilde{\mu}$(见(2.1)及其下面的讨论).

本节的主要结果可叙述如下:

定理 3.8 设 $T\in(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$，$1\leq p\leq\infty$，$\hat{u}$ 是相应于 T 的乘子，并设 $\hat{u}$ 在网格 Λ 的每个点连续. 令 $\lambda(m)=\hat{u}(m)$，$m\in\Lambda$. 则存在唯一的周期化算子 $\tilde{T}$(是由(3.2)定义的)，满足 $\tilde{T}\in(L^p(T_n),\ L^p(T_n))$，且 $\|\tilde{T}\|\leq\|T\|$.

为证明定理 3.8,我们先给出两个引理.

引理 3.9 设 f 是 E_n 上的连续周期函数,则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}f(x)e^{-\varepsilon\pi|x|^2}dx=\int_{Q_n}f(x)dx. \tag{3.10}$$

证明 当 $f(x)=e^{2\pi i m\cdot x}$ 时，由于(见第一章(1.13))对 $\varepsilon>0$，$m\in\Lambda$,有

$$\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}e^{2\pi i m\cdot x}e^{-\varepsilon\pi|x|^2}dx=e^{-\pi|m|^2/\varepsilon},$$

所以等式(3.10)是显然成立的. 因而(3.10)对任一三角多项式也成立. 再用这样的多项式一致逼近 Q_n 上任意一个连续周期函数,便可证明本引理. 】

下面第二个引理是证明定理 3.8 的主要工具.

引理 3.11 假定 P 和 Q 是两个三角多项式,T 属于$(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$，$\tilde{T}$ 是按(3.2)定义在三角多项式类上的算子，对 $\delta>0$，$y\in E_n$,记 $w_\delta(y)=e^{-\pi\delta|y|^2}$. 那么,当 $\alpha,\ \beta>0$,且 $\alpha+\beta=1$ 时,有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}T(Pw_{\varepsilon\alpha})(x)\overline{Q(x)}w_{\varepsilon\beta}(x)dx=\int_{Q_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}dx. \tag{3.12}$$

证明 因为(3.12)中的各式对 P 和 Q 都是线性的,所以我们只需对 $P(x)=e^{2\pi i m\cdot x}$ 和 $Q(x)=e^{2\pi i k\cdot x}$，$m,\ k\in\Lambda$，证明(3.12)即可. 根据 Plancherel 定理和乘子 $\hat{u}$ 的定义,当 φ 和 ψ 分别是函数 $e^{2\pi i m\cdot x}e^{-\pi\varepsilon\alpha|x|^2}$ 和 $e^{2\pi i k\cdot x}e^{-\pi\varepsilon\beta|x|^2}$的Fourier 变换时,左端的积分等于

$\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}\hat{u}(x)\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$. 而由第一章(1.5)和定理1.13，我们有

$$\varphi(x)=e^{-\pi(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)}(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)}$$

和
$$\psi(x)=e^{-\pi(|x-k|^2/\beta\varepsilon)}(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}.$$

现假定 $m\neq k$，从而 $|m-k|\geqslant 1$. 由于对某个适当的常数 A，有 $|\hat{u}(x)|\leqslant A$，所以(3.12)的左端是有界的，其界为

$$\varepsilon^{n/2}A\int_{E_n}e^{-(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)\pi}(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)}e^{-(|x-k|^2/\beta\varepsilon)\pi}(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}dx$$

$$\leqslant\varepsilon^{n/2}A\left[\int_{|x-m|\geqslant\frac{1}{2}}+\int_{|x-k|\geqslant\frac{1}{2}}\right].$$

考虑在 $\left\{x\in E_n;\ |x-m|\geqslant\frac{1}{2}\right\}$ 上的积分，当 $\varepsilon\to 0$ 时，因子 $\varepsilon^{n/2}e^{-(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)\pi}(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)}$ 一致趋于0，而因子 $e^{-(|x-k|^2/\beta\varepsilon)\pi}(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}$ 在 E_n 上的积分为1. 所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon^{(n/2)}\int_{|x-m|\geqslant\frac{1}{2}}$ 趋于0. 交换 m 和 k 的地位，进行同样的论证，可知 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n/2}\int_{|x-k|\geqslant\frac{1}{2}}=0$. 又因 $m\neq k$ 时有

$$\int_{T_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}dx=\int_{Q_n}\lambda(m)e^{2\pi im\cdot x}e^{-2\pi ik\cdot x}dx=0,$$

则(3.12)对 $m\neq k$ 的情形得证.

当 $m=k$ 时，(3.12)之左端等于

$$(3.13)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\alpha\beta)^{-(n/2)}\int_{E_n}\hat{u}(x)e^{-\pi(|x-m|^2/\varepsilon)(1/\alpha+1/\beta)}dx.$$

由于 $(1/\alpha)+(1/\beta)=1/\alpha\beta$，(3.13) 则是当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\hat{u}$ 的 Gauss-Weierstrass 积分的极限. 故根据第一章定理1.25，在 m 属于 $\hat{u}$ 的 Lebesgue 集时，这个极限便是 $\hat{u}(m)$. 而根据假设，$\hat{u}$ 在 m 连续，所以上述结论成立. 这样，就对 $P(x)=e^{2\pi im\cdot x}=Q(x)$ 证明了等式(3.12) $\left(\text{因这时}\int_{T_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}dx=\lambda(m)\right)$. 因而引理得证. 】

我们现在来证明定理3.8. 为了避免某些无关的技术性问题，

我们暂时假定 $1<p<\infty$. 设 q 是 p 的共轭指数，则 $1/p+1/q=1$, $1<q<\infty$. 我们先来证明存在常数 $A\leqslant\|T\|$，使对一切三角多项式 P 有

$$(3.14)\quad \left(\int_{Q_n}|(\tilde{T}P)(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant A\left(\int_{Q_n}|P(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

如果 Q 也是一个三角多项式，则

$$(3.15)\qquad \left|\int_{E_n}(T(Pw_{\varepsilon\alpha}))(x)\overline{Q(x)}w_{\varepsilon\beta}(x)dx\right| \leqslant\|T\|\|Pw_{\varepsilon\alpha}\|_p\|Qw_{\varepsilon\beta}\|_q,$$

其中之范数是关于 E_n 取的，且 $w_\delta(\delta>0)$ 是引理 3.11 中引入的函数. 令 $\alpha=(1/p)$, $\beta=(1/q)$，并用 $\varepsilon^{n/2}$ 乘两端，再令 $\varepsilon\to 0$，则由引理 3.11，左端收敛于 $\int_{Q_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}dx$. 另一方面，由引理 3.9 知

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n/2}\|Pw_{\varepsilon/p}\|_p\|Qw_{\varepsilon/q}\|_q\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}|P(x)|^p e^{-\varepsilon\pi|x|^2}dx\right]^{1/p}\\
&\qquad\cdot\left[\varepsilon^{n/2}\int_{E_n}|Q(x)|^q e^{-\varepsilon\pi|x|^2}dx\right]^{1/q}\\
&=\left[\int_{Q_n}|P(x)|^p dx\right]^{1/p}\left[\int_{Q_n}|Q(x)|^q dx\right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

连同(3.15)一起，可得

$$\left|\int_{Q_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}dx\right| \leqslant\|T\|\left(\int_{Q_n}|P(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{Q_n}|Q(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

最后，对一切满足 $\int_{Q_n}|Q(x)|^q dx\leqslant 1$ 的多项式 Q 取上确界，则得到 (3.14). 这就证明了 $\tilde{T}$ 在三角多项式上的限制是 $L^p(T_n)$ 上的有界算子，其界不超过 $\|T\|$. 于是，这个限制在全 $L^p(T_n)$ 上有唯一的扩张，且就是此扩张满足定理 3.8.

现在来看 $p=1$ 和 $p=\infty$ 的情形. 实际上这种极端情形要比

我们刚才讨论的一般情形要简单得多. 对于 $p=1$, 其结论(如我们已经指出过的)是第一章定理 3.19 以及本章定理 3.4 和 3.6 的直接推论. 当 $p=\infty$ 时, 我们做如下论证: 根据第一章定理 3.20, 若 $T\in(L^{\infty}(E_n), L^{\infty}(E_n))$, 则 $T\in(L^1(E_n), L^1(E_n))$, 而且定理 3.20 的证明表明, T 作为 $L^1(E_n)$ 上的算子, 其范数不会超过它作为 $L^{\infty}(E_n)$ 上算子的范数. 于是, 从刚才所证明的 $p=1$ 的情形知, $\tilde{T}\in(L^1(T_n), L^1(T_n))$. 再由 (3.4) 知, 存在一个 T_n 上的有限 Borel 测度 μ, 满足 $\|d\mu\|=\|\tilde{T}\|$ 与 $\tilde{T}f=f*d\mu$. 但对于 $f\in L^{\infty}(T_n)$, 有 $\|f*d\mu\|_{\infty}\leqslant\|f\|_{\infty}\|d\mu\|$. 于是定理对 $p=\infty$ 也得证. 】

推论 3.16 在定理 3.8 中, 若不假定 $\hat{u}$ 在 Λ 的点上连续, 而改为假定对每个 $m\in\Lambda$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int_{|t|<\varepsilon}[\hat{u}(m-t)-\hat{u}(m)]dt=0. \tag{3.17}$$

则定理的结论仍成立.

事实上, 条件 (3.17) 足以保证极限 (3.13) 存在, 且其值为 $\hat{u}(m)$ (见第一章(4.10)).

我们在前一章所研究的奇异积分算子引出了一类重要的乘子变换. 在那里我们曾证明(也可参阅第四章定理 4.7、推论 4.12 和 (5.10)), 对应于奇异积分算子 T 的乘子是一个零阶齐次函数 Ω_0, 它在单位球面上连续(因而, 在除原点之外处处连续), 并且有性质 $\int_{\Sigma_{n-1}}\Omega_0(x')dx'=0$. 如果我们设 $x\neq 0$ 时 $\hat{u}(x)=\Omega_0(x)$, 及 $\hat{u}(0)=0$, 则推论 3.16 的条件(3.17)被满足, 因而, 当 $f(x)\sim\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 时, 由

$$(\tilde{T}f)(x)\sim\sum_{m\neq 0}\Omega_0(m)a_m e^{2\pi i m\cdot x} \tag{3.18}$$

定义的算子 $\tilde{T}$ 属于 $(L^p(T_n), L^p(T_n))$, $1<p<\infty$. 一个特殊的例子是当 $\Omega_0(x)=P^{(k)}(x)/|x|^k$ 时产生的算子, 此处 $P^{(k)}$ 是 E_n 上的调和多项式, 它是 $k\geqslant 1$ 阶齐次的(见第四章定理 4.5). $\Omega_0(x)=-ix_j/|x|$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 时的特殊情况, 就是通常所说的周期 Riesz 变换(见第六章(2.7)).

现在我们来证明定理 3.8 有逆定理. 设 λ 是 E_n 上的一个连续函数, $\{\lambda(m)\}$族, $m\in\Lambda$, 是由$(L^p(T_n), L^p(T_n))$中的一个算子的所有乘子组成. 我们能否断定 λ 是$(L^p(E_n), L^p(E_n))$中一个算子的乘子?容易看出,这是不行的. 因为我们对 λ 的假定只是对它在网格 Λ 上的值有影响, 而结论则要涉及它在全 E_n 上的性态. 为要提出一个有意义的逆定理, 我们注意到, λ 若是 $(L^p(E_n), L^p(E_n))$中一个算子的乘子,那么对每个 $\varepsilon>0$, 函数 $\lambda(\varepsilon x)$就必定也是一个$(L^p(E_n), L^p(E_n))$型算子的乘子, 其范数只依赖于 λ 而不依赖于 ε. 事实上,对每个 $f\in\mathscr{S}$,我们有$(Tf)^\wedge(x)=\lambda(x)\hat{f}(x)$. 于是, 如果我们定义 T_ε 为算子 $\delta_\varepsilon^{-1}T\delta_\varepsilon$($\delta_\varepsilon$ 是第一章 (1.6) 前引入的伸缩算子), 就又得到一个乘子算子, 其乘子是值为 $\lambda(\varepsilon x)$的函数. 此外, 由于$\|\delta_\varepsilon f\|_p=\varepsilon^{-n/p}\|f\|_p$ 和$\|\delta_\varepsilon^{-1}f\|_p=\varepsilon^{n/p}\|f\|_p$, 我们得知 $\|T_\varepsilon\|=\|T\|$. 从这些事实来看, 不难理解下面的定理是定理 3.8 的逆定理.

定理 3.18 设 λ 是 E_n 上的连续函数. 假定对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个算子 $\widetilde{T}_\varepsilon\in(L^p(T_n), L^p(T_n))$:

$$(3.19)\qquad (\widetilde{T}_\varepsilon f)(x)\sim\sum_{m\in\Lambda}\lambda(\varepsilon m)a_m e^{2\pi i m\cdot x},$$

其中 $\{a_m\}$ 是 $f\in L^p(T_n)$ 的 Fourier 系数. 若设算子 $\widetilde{T}_\varepsilon$ 的范数$\|\widetilde{T}_\varepsilon\|$是一致有界的, 则 λ 就是$(L^p(E_n), L^p(E_n))$型乘子, 而且若 T 是其相应的算子,则 T 的算子范数不超过 $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\widetilde{T}_\varepsilon\|$.

证明 我们首先把 $p=\infty$ 的情形化为 $p=1$ 的情形来处理. 事实上,当 f 和 g (譬如说)是三角多项式时,从(3.19)立刻推出对偶等式

$$(3.20)\qquad \int_{T_n}(\widetilde{T}_\varepsilon f)(x)g(-x)dx=\int_{T_n}(\widetilde{T}_\varepsilon g)(x)f(-x)dx.$$

并由此推出(参看第一章定理 3.20 的类似论证)$\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_1\leqslant\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_\infty$ (这里, 下标是用以表示 $\widetilde{T}_\varepsilon$ 分别作为 $L^1(T_n)$和 $L^\infty(T_n)$ 上的算子范数). 那么,如果对 $p=1$ 证明了本定理,我们就得到一个有乘子 λ 的算子 $T\in(L^1(E_n), L^1(E_n))$,满足$\|T\|_1\leqslant\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_1\leqslant\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_\infty$.

于是，再一次借助于第一章定理 3.20，就可得到 $T\in(L^\infty(T_n), L^\infty(T_n))$，以及 $\|T\|_\infty\leqslant\sup\limits_{\varepsilon>0}\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_\infty$.

因此我们假定 $1\leqslant p<\infty$，并利用下述适当的单位分解：

引理 3.21 存在一个在 E_n 中有紧支集的非负连续函数 η，满足

(a) $\eta(0)=1$;

(b) $\sum\limits_{m\in\Lambda}[\eta(x+m)]^p\equiv1$.

为证明这个引理，我们选取任一在 E_n 中有紧支集的非负连续函数 η_1，满足

$$\begin{cases}\eta_1(0)=1,\\ \eta_1(m)=0,\ m\in\Lambda-\{0\},\\ \eta_1(x)>0,\quad x\in\bar{Q}_n.\end{cases}$$

令 $\eta_2(x)=\eta_1(x)/\sum\limits_{m\in\Lambda}\eta_1(x+m)$. 显然 $\eta_2(0)=1$, $\sum\limits_{m\in\Lambda}\eta_2(x+m)\equiv 1$. 现在我们只需取 $\eta=\eta_2^{1/p}$.

让我们返回来证明定理. 为简单起见，我们假定 $\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_p\leqslant1$, $\varepsilon>0$. 则当 $m\in\Lambda$, $\varepsilon>0$ 时，有 $|\lambda(\varepsilon m)|\leqslant1$ (参看定理 3.1 之证明). 因集合 $\{\varepsilon m: \varepsilon>0,\ m\in\Lambda\}$ 在 E_n 中稠密，故 λ 有界. 所以当 $f\in L^2(E_n)$ 时，$\lambda\hat{f}$ 也属于 $L^2(E_n)$，因而 $\lambda\hat{f}$ 是一个平方可积函数的 Fourier 变换. 这就使我们能够定义这样一个算子 Tf: 对于 $f\in\mathscr{D}$ $(\subset\mathscr{S})$, Tf 是一个函数，其 Fourier 变换是 $\lambda\hat{f}$，即 $(Tf)^\wedge(x)=\lambda(x)\hat{f}(x)$. 我们来证明

$$\|Tf\|_p\leqslant\|f\|_p. \tag{3.22}$$

为此，对 $\varepsilon>0$，定义 $\widetilde{f}_\varepsilon$ 是 f 的伸缩并周期化的形式，即

$$\widetilde{f}_\varepsilon=\varepsilon^{-n}\sum_{m\in\Lambda}f\left(\frac{x+m}{\varepsilon}\right).$$

于是利用 Poisson 求和公式(2.7)可得

$$\widetilde{f}_\varepsilon(x)=\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(\varepsilon m)e^{2\pi im\cdot x}. \tag{3.23}$$

现在我们断言，对每个 $x\in E_n$，有

(3.24) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^n[\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon](\varepsilon x)=[Tf](x).$$

这是因为,从(3.19)和(3.23)我们得出

(3.25) $$\varepsilon^n[\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon](\varepsilon x)=\varepsilon^n\sum_{m\in A}\lambda(\varepsilon m)\hat{f}(\varepsilon m)e^{2\pi i\varepsilon m\cdot x}.$$

而因 λ 有界,$\hat{f}$ 在 ∞ 处快速下降(即对一切正整数 k,

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^k|\hat{f}(x)|=0),$$

且 λ 和 $\hat{f}$ 都连续,所以按 Riemann 积分的定义,(3.25) 的右端在 ε 趋于 0 时趋于

$$\int_{E_n}\lambda(t)\hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}\,dt=(Tf)(x).$$

(见第一章推论 1.21). 因此等式(3.24)得证. 此外,因 η 连续且 $\eta(0)=1$,所以对于每个 $x\in E_n$,我们还有

(3.26) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^n[\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon](\varepsilon x)\eta(\varepsilon x)=(Tf)(x).$$

由于 $\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon$ 有周期性,故得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{np}\int_{E_n}|(\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon)(\varepsilon x)\eta(\varepsilon x)|^p\,dx\\&=\varepsilon^{np-n}\int_{E_n}|\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon(x)|^p[\eta(x)]^p\,dx\\&=\varepsilon^{np-n}\sum_{m\in A}\int_{Q_n}|(\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon)(x)|^p[\eta(x+m)]^p\,dx.\end{aligned}$$

于是由引理 3.21 和假设 $\|\widetilde{T}_\varepsilon\|_p\leqslant 1$,就有

(3.27) $$\int_{E_n}|\varepsilon^n(\widetilde{T}_\varepsilon\widetilde{f}_\varepsilon)(\varepsilon x)\eta(\varepsilon x)|^p\,dx\leqslant\varepsilon^{np-n}\int_{Q_n}|\widetilde{f}_\varepsilon(x)|^p dx.$$

对于充分小的 ε, $\varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)$ 的支集全部位于 Q_n 的内部,此时,对于 $x\in Q_n$, 有 $\varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)=\widetilde{f}_\varepsilon(x)$. 因此当 ε 很小时, (3.27) 之右端等于

$$\begin{aligned}\varepsilon^{np-n}\int_{Q_n}|\varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)|^p\,dx&=\varepsilon^{np-n}\int_{E_n}|\varepsilon^{-n}f(x/\varepsilon)|^p\,dx\\&=\int_{E_n}|f(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

现在对(3.27)的左端应用(3.26)和 Fatou 引理，就得到

$$\int_{E_n} |(Tf)(x)|^p dx \leqslant \int_{E_n} |f(x)|^p dx.$$

这就是要证的不等式(3.22). 又由于类 $\mathscr{D}$ 在 $L^p(E_n)$ 中稠密，$1\leqslant p<\infty$，则定理得证. 】

定理 3.18 及其前面的说明和定理 3.8 一起，有下述明显的推论：

推论 3.28 $\|\tilde{T}_\varepsilon\|$ 和 $\|T\|$ 分别表示定理 3.18 中出现的 $\tilde{T}_\varepsilon$ 和 T 的算子范数，则 $\sup_{\varepsilon>0}\|\tilde{T}_\varepsilon\|=\|T\|$.

§4 低于临界指标的可求和性(否定性结论)

设 $\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是一个可积函数 f 的 Fourier 级数. 推论 2.15 指出，如果 α 大于临界指标 $(n-1)/2$，就成立等式

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}=f(x) \tag{4.1}$$

(几乎处处成立，且当极限按 L^1 范数取时亦成立). 我们自然会问，当 $\alpha\leqslant(n-1)/2$ 时情形会怎样. 在这一节我们主要考虑 $\alpha=(n-1)/2$ 以及 $\alpha=0$ 两种情形.

为了对这个问题有透彻的理解，我们先来复习一下 $n=1$ 时的古典结果. 这时，在临界指标($\alpha=0$)的可求和性与通常的收敛性是一致的. Kolmogoroff 曾证明，存在一个 L^1 函数，使得极限(4.1)在 $\alpha=0$ 时对每个 x 都不存在. 但是对 L^1 函数有一个局部化结果，即，对给定的 x，只要 f 在 x 的一个任意小的邻域里是足够正则的，(4.1) 就对 x 成立. 而对于 $L^p(T_1)$ $(p>1)$ 中的 f，Carleson 和 Hunt† 有一个结果：f 的 Fourier 级数几乎处处收敛于 $f(x)$. 另外还有 M. Riesz 的一个较早的结果：当 $1<p<\infty$ 时，依范数收敛是成立的.

现在我们会看到，在 $n>1$ 时情况相当不同. 这从下面三个事实可以看得很清楚.

定理 4.2 存在一个 $f\in L^1(T_n)$, $n>1$, 使

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2}a_m e^{2\pi i m\cdot x}\right|=\infty$$

对几乎每个 x 成立，且可将这个函数构造得使其支集位于原点的任意一个给定的小邻域中[4].

定理 4.3 三角级数

$$\sum_{m\neq 0}|m|^{-(n/2)+1/2}e^{2\pi i m\cdot x} \tag{4.4}$$

几乎处处发散. 更具体地说，对几乎每个 $x\in Q_n$, 有

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{0<|m|<R}|m|^{-(n/2)+\frac{1}{2}}e^{2\pi i m\cdot x}\right|=\infty.$$

又由定理 2.17 知道，级数(4.4)是一个函数的 Fourier 级数，该函数之值为 $\gamma_{(n-1)/2}^{-1}|x|^{-(n+1)/2}+b(x)$, 其中 $b\in C^\infty(Q_n)$. 这样我们就还有下述推论:

推论 4.5 存在一个属于 $L^p(T_n)$ 的函数，$p<2n/(n+1)$, 它的 Fourier 级数几乎处处发散.

所以当维数 n 充分大时，对于一般的 $L^p(T_n)$ 函数，$p<2$, 几乎处处收敛性不成立. 至于 $p=2$ 的情形如何，则是个没有解决的问题.

上述这三个事实都基于下面的引理:

引理 4.6 若 $n>1$, 则对几乎一切 $x\in Q_n$, 有

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2}e^{2\pi i m\cdot x}\right|=\infty. \tag{4.7}$$

我们分成几步来证明(4.6). 在这过程中，我们令

$$K_R^\alpha(x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x},$$

并常把 $K_R^{(n-1)/2}$ 记作 K_R.

引理 4.8 设 x^0 为一点，满足

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2}e^{2\pi i m\cdot x^0}\right|<\infty,$$

---

4) 由这个定理立即可知，对于临界指标，无论是几乎处处可求和还是局部化结论都不能成立.

则

$$\text{(4.9)}\qquad \sup_{\alpha>(n-1)/2}\ \sup_{R>0}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\alpha}e^{2\pi i m\cdot x^0}\right|<\infty.$$

这个简单的引理说明，把我们的问题归结为 $\alpha>(n-1)/2$ 的情形可能是有益的，那时就可以直接应用 Poisson 求和公式了.

为证明引理，我们先注意到从等式[5]

$$t^{\delta+\beta}=\frac{\Gamma(\delta+\beta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}s^{\delta}\,ds,$$

经变量代换 $s=r^2-|m|^2$，推出

$$\int_{|m|}^{R}(R^2-r^2)^{\beta-1}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2}r^n\,dr$$

$$=\int_{|m|}^{R}(R^2-r^2)^{\beta-1}(r^2-|m|^2)^{(n-1)/2}r\,dr$$

$$=\frac{R^{2\beta+n-1}\Gamma[(n+1)/2]\Gamma(\beta)}{2\Gamma[(n+1)/2+\beta]}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\beta+(n-1)/2}$$

令 $$\beta=\alpha-\frac{n-1}{2}>0,\quad c_\alpha=\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma[(n+1)/2]\Gamma(\beta)},$$

并交换求和与求积分的次序，就得到

$$K_R^{\alpha}(x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\alpha}e^{2\pi i m\cdot x}$$

$$=\sum_{|m|<R}\left\{c_\alpha R^{-2\alpha}\int_{|m|}^{R}(R^2-r^2)^{\beta-1}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2}r^n\,dr\right\}e^{2\pi i m\cdot x}$$

$$=c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R\left\{\sum_{|m|<r}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2}e^{2\pi i m\cdot x}\right\}(R^2-r^2)^{\beta-1}r^n\,dr.$$

就是说，

$$\text{(4.10)}\qquad K_R^{\alpha}(x)=c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R K_r(x)(R^2-r^2)^{\beta-1}r^n\,dr.$$

现在，若 $\limsup_{R\to\infty}|K_R(x^0)|<\infty$，则 $\sup_{R>0}|K_R(x^0)|=A<\infty$.
于是由(4.10)就有

$$|K_R^{\alpha}(x^0)|\leqslant A\left\{c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R(R^2-r^2)^{\beta-1}r^n\,dr\right\}.$$

---

5) 从著名的 beta 函数和 gamma 函数的关系 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$，经变量代换，立即可得这一等式.

而式中括号内部的式子恒等于1(易从(4.10)中考虑常数项而看出). 因而

$$\sup_{\alpha>(n-1)/2}\sup_{R>0}|K_R^\alpha(x^0)|\leqslant\sup_{R>0}|K_R(x^0)|.$$

引理4.8得证. 】

现在我们来描述(我们认为)使(4.7)成立的点集 S. 设 S 是如下点 x 的集合, 它使可数实数集 $\{|x-m|;\ m\in\Lambda\}$ 对有理数线性无关. 显然, 在一维情形 S 是空的, 而我们将证明, 当 $n>1$ 时, S 的余集是零测度集.

引理4.11 若 $x^0\in S$, 则

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2}e^{2\pi i m\cdot x^0}\right|=\infty.$$

证明 若 $\alpha>(n-1)/2$, 则按(2.14)前面的说明, 我们可以应用 Poisson 求和公式而得到

(4.12) $$K_R^\alpha(x)=\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)R^{(n/2)-\alpha}\times\sum_{m\in\Lambda}J_{(n/2)+\alpha}(2\pi R|x-m|)/|x-m|^{(n/2)+\alpha}.$$

根据 $$\left||x^0-m|^{-\alpha+(n+1)/2}-|m|^{-\alpha+(n+1)/2}\right|\leqslant A|m|^{-\alpha+(n+3)/2}$$

以及 $$\sum_{|m|>0}|m|^{-n-1}<\infty,$$

利用第四章引理 3.11 中对 Bessel 函数的渐近估计(也可参看脚注), 对 $x^0\notin\Lambda$, 我们得到

(4.13) $$K_R^\alpha(x^0)=c_\alpha R^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\sum_{m\neq0}\frac{\cos(2\pi R\gamma_m+\delta_\alpha)}{\gamma_m^{\alpha+(n+1)/2}}+E(R,\alpha),$$

其中 $\gamma_m=|x^0-m|$, 并且 $\sup\limits_{\alpha>(n-1)/2}\sup\limits_{R>1}R|E(R,\alpha)|<\infty$.

由恒等式(4.13)又推出, 当 $\lambda\geqslant0$ 时, 极限

(4.14) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T K_R(x^0)e^{2\pi i\lambda R}dR$$

存在($=a(\lambda)$), 此处

$$a(\lambda)=\begin{cases}c\gamma_m^{-n}, & \text{当 } \lambda=\gamma_m;\\ 0, & \text{当 } \lambda \text{ 为其它值}.\end{cases}$$

(为证明(4.14), 先将(4.13)对 R 积分, 再令 $\alpha\to(n-1)/2$, 最

后再令 $T\to\infty$). 下面的引理表明，当 $x^0\in S$ 时，(4.14) 与 $\limsup_{R\to\infty}|K_R(x^0)|<\infty$ 是不相容的.

引理 4.15 设 K 是 $[1,\infty)$ 上一个有界实函数，对任何 $\lambda\geqslant 0$，$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T K(t)e^{2\pi i\lambda t}\,dt=a(\lambda)$ 存在. 令 $\{\lambda_j\}$ 是使 $a(\lambda)\neq 0$ 的 λ 的集合，并假定这个集合对有理数线性无关. 那么，

$$\sum|a(\lambda_j)|<\infty. \tag{4.16}$$

证明 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\{\lambda_j\}$ 的任一有限子集. 记

$$a(\lambda_j)=|a(\lambda_j)|e^{i\mu_j},\quad A(t)=\prod_1^N(1+\cos(2\pi\lambda_j t-\mu_j)).$$

由 $\{\lambda_j\}$ 的线性无关性可知，$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T A(t)\,dt=1$，而且

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T K(t)A(t)\,dt=\sum_1^N|a(\lambda_j)|.$$

由此可推出 $\sum_1^N|a(\lambda_j)|\leqslant\sup_{t>1}|K(t)|$. (4.16) 和引理 4.15 得证.】

因为
$$\sum_m\gamma_m^{-n}\approx\sum_{m\neq 0}|m|^{-n}=\infty,$$

可见当 $x^0\in S$ 时，$\limsup_{R\to\infty}|K_R(x^0)|=\infty$. 于是引理 4.11 得证.】

为了证明我们的主要引理(引理 4.6)，只需证明下面的结论:

引理 4.17 若 $n>1$，则 S 的余集有零测度.

证明 假定 $a_{m_1}, a_{m_2},\cdots,a_{m_k}$ 是非零有理数(与格点 $m_1, m_2,\cdots,m_k$ 相关联). 令

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^k a_{m_j}|x-m_j|,$$

则因 Φ 在 m_j 有奇异性，$j=1, 2,\cdots,k$，故 $\Phi(x)\neq 0$，而且 Φ 在连通集 $E_n-\Lambda$ 上是实解析的. 但是一个非零实解析函数只能在一个 Lebesgue 零测度集上为零，因而

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^k a_{m_j}|x-m_j|=0 \tag{4.18}$$

只能在零测度集上成立. 又由于只有可数多个这种点集(每个这种点集与非零有理数 $a_{m_1},\cdots,a_{m_k}$ 的一种选取相关)，所以它们的

并集仍是零测度集. 而这个并集显然就是 $E_n - S$[6]. 这就证明了引理 4.17. 】

现在来看看我们已得到的结果. 设 μ_0 是 Dirac 测度, 则

$$d\mu_0 \sim \sum_{m\in\Lambda} e^{2\pi i m\cdot x}.$$

所以根据引理 4.6 知, $d\mu_0$ 的 Fourier-Stieltjes 级数, 在临界指标对几乎每个 $x\in Q_n$ 不能用 Riesz 平均求和. 为完成定理 4.2 的证明, 我们用"尖峰" L^1 函数代替 μ_0.

设 ψ 是一个 E_n 中的非负 C^∞ 函数, 其支集在 E_n 的单位球 $|x|\leqslant 1$ 内, 并满足 $\int_{E_n}\psi(x)dx=1$. 又设 $\Phi(y)=\int_{E_n}\psi(x)e^{-2\pi i x\cdot y}dx$, $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\sum_{m\in\Lambda}\psi((x-m)/\varepsilon)$. 于是由 Poisson 求和公式得到

$$\varphi_\varepsilon(x)\sim\sum_{m\in\Lambda}\Phi(\varepsilon m)e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{4.19}$$

我们来证明, 可以找到两个由正数组成的零序列 $\{\varepsilon_k\}$ 和 $\{\delta_k\}$, 使得函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\varphi_{\varepsilon_k}(x)-\varphi_{\delta_k}(x)) \tag{4.20}$$

属于 $L^1(T_n)$, 并满足定理 4.2 之结论.

设 S_R 是如下定义的算子: 当 $f\sim\sum_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 时,

$$(S_R f)(x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2}a_m e^{2\pi i m\cdot x}.$$

首先我们有

$$\sup_{0<R}|(S_R\varphi_\varepsilon)(x)|\leqslant A\varepsilon^{-n}. \tag{4.21}$$

事实上, 有

$$\begin{aligned}\sup_{0<R}|(S_R\varphi_\varepsilon)(x)|&\leqslant\sum_{m\in\Lambda}|\Phi(\varepsilon m)|\\&=\sum_{|m|<1/\varepsilon}|\Phi(\varepsilon m)|+\sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon}|\Phi(\varepsilon m)|.\end{aligned}$$

而因函数 $|\Phi(x)|$ 和 $|x|^{n+1}|\Phi(x)|$ 都是有界的, 所以我们有

6) 读者应注意, 这个证明对 $n=1$ 不成立, 因为那时 Φ 由若干"段"不同的线性函数合成. 换句话说, 当 $n=1$ 时, $E_n-\Delta$ 是不连通的.

(i) $$\sum_{|m|<1/\varepsilon}|\Phi(\varepsilon m)|\leqslant\|\Phi\|_\infty\sum_{|m|<1/\varepsilon}1=\|\Phi\|_\infty N_\varepsilon,$$

这里 N_ε($\leqslant\varepsilon^{-n}$ 的常数倍)是满足 $|m|<1/\varepsilon$ 的格点数; 并有

(ii) $$\begin{aligned}\sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon}|\Phi(\varepsilon m)|&\leqslant\{\sup_{x\in E_n}|x|^{n+1}|\Phi(x)|\}\sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon}|\varepsilon m|^{-(n+1)}\\&=\{\sup_{x\in E_n}|x|^{n+1}|\Phi(x)|\}\varepsilon^{-n-1}\sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon}|m|^{-(n+1)}\\&\leqslant B\varepsilon^{-n}.\end{aligned}$$

从这两个不等式就可得出(4.21).

我们再构造子集 $\mathscr{E}_k\subset Q_n$, 其测度为 $|\mathscr{E}_k|\geqslant 1-1/k$, 且取一个正的递增序列 $\{R_k\}$, 使 $x\in\mathscr{E}_k$ 时,

(4.22) $$\sup_{R<R_k}|(S_Rf)(x)|\geqslant k.$$

易知,一旦这样做好以后,就证明了定理 4.2. 显然定理 4.2 的第一个结论从(4.22)立刻可以推出. 而第二个结论,则是下述事实的推论: φ_ε 的支集在 Q_n 内,且位于以原点为心、ε 为半径的球内,因而从 f 减去级数(4.20)的部份和,就得到满足(4.2)的两个结论的函数.

现在假定对于 $1\leqslant j\leqslant k-1$, ε_j, δ_j, R_j 和 $\mathscr{E}_j$ 都已确定, 我们来说明如何选取 ε_k, δ_k, R_k 和 $\mathscr{E}_k$. 我们总是选取 $\varepsilon_k\leqslant\delta_k$, 且取 δ_k 足够小,使得

(4.23) $$\sup_{R\leqslant R_{k-1}}|S_R(\varphi_{\varepsilon_k}-\varphi_{\delta_k})|\leqslant 1.$$

如果对每个 k 都能做到这一点,自然当 $k'>k$ 时,就有

(4.23′) $$\sup_{R<R_k}|S_R(\varphi_{\varepsilon_{k'}}-\varphi_{\delta_{k'}})|\leqslant 1.$$

而由于

$$\begin{aligned}\sup_{R<R_{k-1}}|S_R(\varphi_{\varepsilon_k}-\varphi_{\delta_k})|&\leqslant\sum_{|m|<R_{k-1}}|\Phi(\varepsilon_k m)-\Phi(\delta_k m)|\\&\leqslant A(\delta_k-\varepsilon_k)\sum_{|m|<R_{k-1}}|m|\\&\leqslant A'\delta_k(R_{k-1})^{n+1},\end{aligned}$$

故(4.23)在 δ_k 足够小时是可以实现的.

再令 A_k 是一个正数,满足

(4.24) $$A_k\geqslant\sup_{0<R<\infty}\{|S_R(\sum_{j<k}2^{-j}(\varphi_{\varepsilon_j}-\varphi_{\delta_j})(x)-2^{-k}\varphi_{\delta_k}(x))|\}.$$

因有(4.21),所以这样的有限常数 A_k 是存在的.

至此,A_k 和 δ_k 已经取好,对 ε_k 只是限制了 $\varepsilon_k\leqslant\delta_k$. 我们现在再给 ε_k 加上一个条件,它能使 φ_{ε_k} 实质上充分接近于 $d\mu_0$. 就是说.我们知道,在 R_k 足够大时,根据引理 4.6 的几乎处处发散性,有

$$\sup_{R<R_k} 2^{-k}|(S_R d\mu_0)(x)|>A_k+k+2 \tag{4.25}$$

在集 $\mathscr{E}_k\subset Q_n$ 上成立,其测度为 $|\mathscr{E}_k|\geqslant 1-1/k$. 而 φ_ε 的 Fourier 级数当 $\varepsilon\to 0$ 时逐项收敛于 $d\mu_0$ 的项. 故选充分小的 ε_k, 就得到对 $x\in\mathscr{E}_k$, 有

$$\sup_{R<R_k} 2^{-k}|(S_R\varphi_{\varepsilon_k})(x)|>A_k+k+1. \tag{4.26}$$

这样,由(4.25)和(4.26)就可确定出 ε_k, R_k 和 $\mathscr{E}_k$.

我们现在来证明(4.22). 将 f 写为

$$f=\{\sum_{j<k}2^{-j}(\varphi_{\varepsilon_j}-\varphi_{\delta_j})-2^{-k}\varphi_{\delta_k}\}+2^{-k}\varphi_{\varepsilon_k}$$
$$+\{\sum_{j>k}2^{-j}(\varphi_{\varepsilon_j}-\varphi_{\delta_j})\}.$$

对于 $x\in\mathscr{E}_k$, 考虑 $\sup\limits_{R<R_k}|(S_Rf)(x)|$. 因有(4.24), 所以第一个括号里的值最大是 A_k. 由(4.26), 中间一项的值至少是 A_k+k+1. 而最后一项的值不超过 1(由(4.23)). 这就证明了(4.22). 于是定理 4.2 证毕. 】

现在来证明定理 4.3. 首先我们断言,若是对某个 x^0, 有

$$\sup_{0<R<\infty}\left|\sum_{0<|m|<R}|m|^{-(n/2)+1/2}e^{2\pi i m\cdot x^0}\right|<\infty,$$

则有

$$\sup_{0<R<\infty}R^{-(n/2)+1/2}\left|\sum_{0<|m|<R}e^{2\pi i m\cdot x^0}\right|<\infty. \tag{4.27}$$

这是因为,若令 $\sigma_R=\sum\limits_{0<|m|<R}|m|^{-(n/2)+1/2}e^{2\pi i m\cdot x^0}$, 则得

$$\sum_{0<|m|<R}e^{2\pi i m\cdot x^0}=\int_1^R t^{(n/2)-1/2}\,d\sigma_t$$
$$=R^{(n/2)-1/2}\sigma_R-((n/2)-1/2)\int_1^R\sigma_t t^{(n/2)-3/2}\,dt.$$

、由此可见，$\sup_{0<R<\infty} |\sigma_R| < \infty$ 蕴含(4.27).

其次我们证明，对每个使

$$\sup_{0<R<\infty} \left| \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m \cdot x^0} \right| = \infty$$

成立的 x^0（由引理 4.6，几乎一切 $x^0 \in Q_n$ 都满足这一关系)，有

$$\sup_{0<R<\infty} R^{-(n/2)+1/2} \Big| \sum_{0<|m|<R} e^{2\pi i m \cdot x^0} \Big| = \infty.$$

这就是说，我们要证明，对满足

$$\sup_{0<R<\infty} |K_R(x^0)| = \sup_{0<R<\infty} |K_R^{(n-1)/2}(x^0)| = \infty$$

的每个 x^0，成立着

$$\sup_{0<R<\infty} R^{-(n/2)+1/2} |K_R^0(x^0) - 1| = \infty.$$

当 n 是奇数时，这是容易做到的．事实上，最简单的情形是 $n=3$. 我们就来考虑这种情形，这时临界指标为 $(n-1)/2=1$. 对固定的 x^0，我们记

$$F_\alpha(t) = t^\alpha K_{\sqrt{t}}^\alpha(x^0) = \sum_{|m|^2<t} (t-|m|^2)^\alpha e^{2\pi i m \cdot x^0}.$$

显然在 $\alpha \geqslant 1$ 时，有 $(d/dt)F_\alpha(t) = \alpha F_{\alpha-1}(t)$. 我们断言

(4.28) $$|F_2(t)| \leqslant A t^{3/2}, \quad 1 \leqslant t < \infty.$$

事实上，当 $\alpha > (n-1)/2$ 时，可以对 $K_R^\alpha(x^0)$ 应用 Poisson 求和公式来得出(4.12). 由此，并利用估计式 $|J_{(n/2)+\alpha}(2\pi R)| \leqslant AR^{-(1/2)}$, $R \geqslant 1$（见第四章引理 3.11)，就得到

$$|K_R^\alpha(x^0)| \leqslant AR^{(n-1)/2-\alpha}, \quad 1 \leqslant R < \infty.$$

而根据 F_2 的定义，此不等式等价于(4.28).

若 $|R^{-(n/2)+1/2} K_R^0(x^0)| \leqslant A$，则（因 $n=3$）有

(4.29) $$\frac{1}{2} \left| \frac{d^2 F_2(t)}{dt^2} \right| = |F_0(t)| \leqslant A t^{1/2}, \quad 1 \leqslant t < \infty.$$

再利用 F_2 的到二阶导数的 Taylor 展开，我们就看出

$$|F_2(t+h) - F_2(t) - hF_2'(t)| \leqslant \frac{h^2}{2} \sup_{t \leqslant t' \leqslant t+h} |F_2''(t')|.$$

若令 $h = t^{1/2}$，则由(4.28)和(4.29)就推得 $|F_2'(t)| \leqslant Bt$, $1 \leqslant t < \infty$. 这样，就有 $|F_1(t)| \leqslant Bt/2$，因而 $\sup_{1 \leqslant R < \infty} |K_R(x^0)| \leqslant B$. 这就证明

了，只要 $\sup_{R>0}|K_R(x^0)|=\infty$，就有

$$\sup_{R>0} R^{-(n/2)+1/2}|K_R^0(x^0)-1|=\infty.$$

于是对于 $n=3$ 的情形证明了定理 4.3. $n>1$ 的其它情形是类似的，但更复杂一些. 所需用的方法将在(6.10)给出. 】

§5 低于临界指标的可求和性

设 $\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是函数 f 的 Fourier 级数，且

$$S_R^\alpha(f)(x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

是它的 α 阶Riesz平均. 我们用$S_*^\alpha(f)(x)$表示相应的"极大函数"，即

$$S_*^\alpha(f)(x)=\sup_{0<R<\infty}|S_R^\alpha(f)(x)|.$$

在这一节里我们会看到，当 $f\in L^p(T_n)$, $1<p<\infty$ 时，对于临界指标以下的可求和性有一些肯定的结果. 所给出的定理，从第 4 节的反例看来，并未完全解决多重 Fourier 级数的可求和问题. 但就现有知识来讲，它确实给出了最深入的结果[7].

定理 5.1 设 $1<p<\infty$, $n>1$, $\alpha>(n+1)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$. 则

(a) $\|S_*^\alpha(f)\|_p\leqslant A_{p,\alpha}\|f\|_p$,

(b) 对几乎每个 x, $\lim_{R\to\infty}S_R^\alpha(f)(x)=f(x)$,

(c) 当 $R\to\infty$ 时，$\|S_R^\alpha(f)-f\|_p\to 0$.

这个定理将由两个引理以及由线性算子之模的复凸性得到的两个引理中的估计式的综合(第五章定理 4.1)推出. 第一个引理是第 2 节中 α 大于临界指标的一些结果的重述，第二个引理则是 α 接近于 0 时的一个 L^2 结果. 第一个引理如下:

引理 5.2 当 $\alpha>(n-1)/2$ 时，定理 5.1 之(a)成立.

我们提醒读者，当 $\alpha>(n-1)/2$ 时，定理 5.1 之(a)和(b)都包含在定理 2.11 中，特别是包含在它的推论 2.15 中.

7) 见 Fefferman[1]最近的结果.

证明 设 $f\in L^p(T_n)$. 我们把 f 对 E_n 的周期延拓仍记作 f. 由推论 2.15 (和它前面的评注), 我们知道, 对一个适当的 φ, 有

$$S_R^\alpha(f)(x)=\int_{Q_n}\sum_{m\in\Lambda}\varphi_\varepsilon(y+m)f(x-y)dy$$
$$=\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(y)f(x-y)dy,$$

其中 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon=1/R$.

在对 $S_*^\alpha(f)=\sup\limits_{0<R<\infty}|S_R^\alpha(f)|$ 证明 (a) 时, 我们只需考虑 $R\geqslant1$ 的情形 (即 $\varepsilon\leqslant1$), 因为当 $R<1$ 时, 就会有 $S_R^\alpha(f)=a_0$, 且 $|a_0|\leqslant\|f\|_1\leqslant\|f\|_p$. 现在令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|>1;\\ f(x), & \text{当 } |x|\leqslant1.\end{cases}$$

显然有 $$\left(\int_{E_n}|\tilde{f}(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant A\left(\int_{Q_n}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

并且

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)=\int_{|y|<1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy$$
$$+\int_{|y|>1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy.$$

我们已经知道 (见 (2.14) 前面的一段), 此时

$$\varphi(x)=\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)|x|^{-(\alpha+n/2)}J_{\alpha+n/2}(2\pi|x|).$$

从而根据第四章 (3.12) 知, $|\varphi(x)|\leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}$, 其中 $\delta=\alpha-(n-1)/2$. 因而, 有如定理 2.11 的证明所示, 我们有

$$\left|\int_{|y|>1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy\right|$$
$$\leqslant A'\varepsilon^\delta\Big(\sum_{m\neq0}|m|^{-n-\delta}\Big)\int_{Q_n}|f(x)|dx,$$

而 $$\int_{|y|<1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy=\int\varphi_\varepsilon(x-y)\tilde{f}(y)dy,$$

所以由第二章 (3.9) 就知, 当 $p>1$, $\alpha>(n-1)/2$ 时,

$$\|S_*^\alpha(f)\|_p\leqslant A_{p,\alpha}\|f\|_p.$$ ∎

我们来对 Riesz 平均 S_R^α 做些一般的说明. 在引入 Riesz 平

均时，我们作了一个隐含的假定，即指标 α 是非负的. 然而在所给的定义中，并没有限制不能考虑 α 是负的或甚至是复的情况. 事实上，S_R^α 作为 α 的解析函数的性态，将是我们应用的主要工具之一. 下面的 L^2 结果就包含了负阶平均的情形.

引理 5.3 设

$$M^\alpha(f)(x)=\sup_{0<R<\infty}\left(\frac{1}{R}\int_0^R|S_t^\alpha(f)(x)|^2dt\right)^{1/2}.$$

则当 $f\in L^2(T_n)$，$\alpha>-\dfrac{1}{2}$ 时，

(5.4) $$\|M^\alpha(f)\|_2\leqslant A_\alpha\|f\|_2.$$ [8]

证明 我们引进辅助函数 $G^\alpha(f)$：

$$G^\alpha(f)(x)=\left(\int_0^\infty|S_R^{\alpha+1}(f)(x)-S_R^\alpha(f)(x)|^2\frac{dR}{R}\right)^{1/2}.$$

我们断言，当 $f\in L^2(T_n)$，$\alpha>-\dfrac{1}{2}$ 时，

(5.5) $$\|G^\alpha(f)\|_2\leqslant A_\alpha\|f\|_2.$$

事实上，由 Parseval 公式和 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}
&\|G^\alpha(f)\|_2^2\\
&=\int_0^\infty\left(\sum_{|m|<R}\left|\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(\alpha+1)}-\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha\right|^2|a_m|^2\right)\frac{dR}{R}\\
&=\sum_{m\neq0}|a_m|^2\int_{|m|}^\infty\frac{|m|^4}{R^4}\left[1-\frac{|m|^2}{R^2}\right]^{2\alpha}\frac{dR}{R}\\
&=C_\alpha\sum_{m\neq0}|a_m|^2.
\end{aligned}$$

这第三个等式是由下述事实推出的：

$$\begin{aligned}
\int_{|m|}^\infty\frac{|m|^4}{R^4}\left[1-\frac{|m|^2}{R^2}\right]^{2\alpha}\frac{dR}{R}
&=\int_1^\infty s^{-5}(1-s^{-2})^{2\alpha}\,ds=C_\alpha\\
&=[2(2\alpha+1)(2\alpha+2)]^{-1},
\end{aligned}$$

其中最后一个积分在 $\alpha>-\dfrac{1}{2}$ 时收敛. 于是得

---

8) 注意，量 $M^\alpha(f)$ 表示我们最终要去控制的那种表达式的平均.

$$\|G^{\alpha}(f)\|_2^2=C_\alpha\{\|f\|_2^2-|a_0|^2\}.$$
这当然是(5.5)的一个更精确的形式．而从(5.5)则很容易推得引理．首先注意到由 $G^{\alpha}(f)$ 的定义，有

$$\sup_{0<R<\infty}\frac{1}{R}\int_0^R|S_t^{\alpha+1}(f)(x)-S_t^{\alpha}(f)(x)|^2dt$$
$$\leqslant[G^{\alpha}(f)(x)]^2,$$

于是

(5.6) $$M^{\alpha}(f)(x)\leqslant M^{\alpha+1}(f)(x)+G^{\alpha}(f)(x).$$

因而重复应用(5.6)就得到

(5.7) $$M^{\alpha}(f)\leqslant M^{\alpha+k}(f)+G^{\alpha}(f)+G^{\alpha+1}(f)$$
$$+\cdots+G^{\alpha+k-1}(f).$$

现在，我们若取 $k>n/2$，则 $\alpha+k>(n-1)/2$，由于 $M^{\alpha+k}(f)$ 小于或等于 $S_*^{\alpha+k}(f)$，我们就可以应用引理 5.2 (取 $p=2$) 而得到 $\|M^{\alpha+k}(f)\|_2\leqslant A\|f\|_2$. 此不等式连同(5.5)(应用到 $G^{\alpha}(f)$, $G^{\alpha+1}(f)$, $\cdots$, $G^{\alpha+k-1}(f)$ 上)，就得出(5.4)，引理得证． 】

只要我们能得到一个公式，把给定阶的 Riesz 平均表示成更低阶的 Riesz 平均的平均，我们就能应用引理 5.3. 这里所要进行的运算都已在引理 4.8 的证明中做过了．实际上，由等式

$$\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\beta+\delta}=C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}$$
$$\times\int_{|m|}^R(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}\left(1-\frac{|m|^2}{t^2}\right)^{\delta}dt$$

(其中 $C_{\beta,\delta}=2\Gamma(\delta+\beta+1)/\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)$) 立即给出所要的表达式，即

(5.8) $$S_R^{\beta+\delta}=C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}\int_0^R(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}S_t^{\delta}\,dt.$$

于是可得

$$|S_R^{\beta+\delta}(f)(x)|\leqslant C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}\left(\int_0^R|(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt\right)^{1/2}$$
$$\times R^{1/2}\cdot R^{-1/2}\left(\int_0^R|S_t^{\delta}(f)(x)|^2dt\right)^{1/2},$$

因而，对一切 $R>0$ 取上确界，便得

(5.9) $$S_*^{\beta+\delta}(f)(x)\leqslant C'_{\beta,\delta}M^\delta(f)(x),\quad 当\ \beta>\frac{1}{2}$$ [9].

最后，给定 $\alpha>0$，取 β 和 δ 使得 $\beta+\delta=\alpha$，$\delta>-\frac{1}{2}$，$\beta>\frac{1}{2}$。则结合(5.9)和引理 5.3，我们就得出下述 L^2 中的基本不等式：

引理 5.10 若 $\alpha>0$，则对 $L^2(T_n)$ 中之一切 f，有

$$\|S_*^\alpha(f)\|_2\leqslant A_\alpha\|f\|_2.$$

我们现在暂时中断定理 5.1 的证明，而先来看看我们已经得到了的结论。定理 5.1 的主要部份是极大不等式(定理之(a))。只要有了它，其余的则都是常规的结果。当 p 接近于 1 或 ∞ 时，(a) 实际上已经包含在引理 5.2 中。此外，引理 5.10 给出了在 $p=2$ 时的不等式。从这些特殊情形再利用第五章第 4 节建立的插值定理，就能得出一般的情况。虽然这种做法的思路很简单，但详细做起来却有些复杂。首先需要的是把刚才谈到的两个特殊情形推广到复数阶 α 上去。这种推广是一个非常简单的一般原理的直接结果，这个原理是说，若在 $\alpha\geqslant 0$ 时，对 $S_*^\alpha(f)$ 有一估计式成立，则对 $S_*^{\alpha'}(f)$（其中 α' 是满足 $\mathrm{Re}(\alpha')>\alpha$ 的复数），亦有一个相应的估计。这是从公式(5.8)取 $\delta=\alpha$，$\beta+\delta=\alpha'$ 推出的（这时 $\mathrm{Re}(\beta)>0$）。事实上，我们有

$$S_*^{\alpha'}(f)\leqslant S_*^\alpha(f)C_{\beta,\delta}\int_0^1(1-s^2)^{\mathrm{Re}(\beta)-1}s^{2\alpha+1}ds$$

$$=\frac{|\Gamma(\alpha'+1)|\Gamma(\mathrm{Re}(\beta))}{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha')+1)|\Gamma(\beta)|}S_*^\alpha(f).$$

而由于 $\Gamma(\alpha'+1)\leqslant|\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha')+1)|$，则得

(5.11) $$S_*^{\alpha'}(f)\leqslant D_\beta S_*^\alpha(f),$$

其中 $D_\beta=\Gamma(\mathrm{Re}(\beta))/|\Gamma(\beta)|$。

因为算子 $f\to S_*^\alpha(f)$ 是非线性的，而我们又希望对线性算子使用插值定理，所以就需要引入另一个技术手段。为此，我们设 $\mathscr{C}$

---

9) 注意，若 $\beta>\frac{1}{2}$，则

$$R^{1-4\beta-4\delta}\int_0^R|(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt=\int_0^1|(1-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt<\infty.$$

表示 T_n 上只取有限多个不同函数值的非负可测函数类. 假定 $R\in\mathscr{C}$, 则

(5.12) $$|S^{\alpha}_{R(x)}(f)(x)|\leqslant S^{\alpha}_{*}(f)(x).$$

而我们说这个不等式之如下的逆也成立:

(5.13) $$\sup_{R\in\mathscr{C}}\|S^{\alpha}_{R(x)}(f)(x)\|_p=\|S^{\alpha}_{*}(f)(x)\|_p.$$

这是因为, 我们可以在 $\mathscr{C}$ 中找到一个序列 $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\cdots$, $R_j(x)$, $\cdots$, 使得对一切 $x\in T_n$, 有

$$\lim_{j\to\infty}|S^{\alpha}_{R_j(x)}(f)(x)|=\sup_{0<R<\infty}|S^{\alpha}_{R}(f)(x)|=S^{\alpha}_{*}(f)(x).$$

我们现在固定一个元素 $R\in\mathscr{C}$, 考虑线性算子

(5.14) $$f\to S^{\alpha}_{R(x)}(f)(x)$$

和它们对参数 α 的解析依赖关系. 假定 f 是可积的, 并且 $f(x)\sim\sum\limits_{m\in\Lambda}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$. 由于 $R(x)$ 只取有限个值(因而有界), 容易看出

$$S^{\alpha}_{R(x)}(f)(x)=\sum_{|m|<R(x)}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2(x)}\right)^{\alpha}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

对 α 解析, 而且它在复 α 平面的任何垂直带域中, 按第五章定理 4.1 的意义, 有容许增量.

设 $\alpha=\mu+i\nu$, $\mu_0>0$, $\mu_1>(n-1)/2$. 那么由(5.12)、(5.11)和(5.10), 取 $\alpha'=\mu_0+i\nu$, $\alpha=\mu_0/2$, $\beta=(\mu_0/2)+i\nu$, 则对一切简单函数 f, 我们有

(5.15) $$\|S^{\mu_0+i\nu}_{R(x)}(f)(x)\|_2\leqslant A_0(\nu)\|f\|_2.$$

其中, $$A_0(\nu)\leqslant A_0\frac{\Gamma(\mu_0/2)}{|\Gamma((\mu_0/2)+i\nu)|}\leqslant A_0'e^{\pi|\nu|}.$$ [10]

重要的是要看到 $A_0(\nu)$ 的界是不依赖于 $R\in\mathscr{C}$ 的选择的. 类似地, 由(5.12)、(5.11)和(5.2), 取 $\alpha'=\mu_1+i\nu$, $\alpha=\frac{1}{2}[\mu_1+(n-1)/2]$, $\beta=\frac{1}{2}[\mu_1-(n-1)/2]+i\nu$, 则对一切简单函数 f 和 $1<p_1<\infty$, $\mu_1>(n-1)/2$, 有

10) 可以利用渐近公式 $|\Gamma(\mu/2)+i\nu|\sim\sqrt{2\pi}\,|\nu|^{(\mu-1)/2}e^{-\pi|\nu|/2}$ $(\nu\to\infty)$, 来得到 $A_0(\nu)$ 的更精确的估计. 但这对于应用第五章插值定理 4.1 是不需要的.

(**5.16**) $$\|S_{R(x)}^{\mu_1+i\nu}(f)(x)\|_{p_1}\leqslant A_{1,p_1}(\nu)\|f\|_{p_1},$$

其中 $A_{1,p_1}(\nu)\leqslant A'_{1,p_1}e^{\pi|\nu|}$. 这里的常数也不依赖于 $R(x)$.

现在，我们借助于第五章插值定理 4.1，保持那里的记号不变，并设 $0<t<1$, $p_0=2$, 以及 p_1 是(5.16)中的指标，如果 $\mu=\mu_0(1-t)+\mu_1 t$, $1/p=[(1-t)/p_0]+(t/p_1)=(1-t)/2+(t/p_1)$, 那么我们得到

(**5.17**) $$\|S_{R(x)}^{\mu}(f)(x)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p.$$

A_p 也与 $R(x)$ 在 $\mathscr{C}$ 中的选择无关. 而由(5.17)和(5.13)可得

(**5.18**) $$\|S_*^{\mu}(f)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p.$$

我们断言,(5.18)中对 p 和 μ 的限制正是定理 5.1 的条件，即 $1<p<\infty$, $\mu>(n-1)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$. 我们回想一下, $\mu_0>0$, $\mu_1>(n-1)/2$ 和 $1<p_1<\infty$ 在其限制取值的范围内是任意的，而 $\mu=\mu_0(1-t)+t\mu_1$, $1/p=(1-t)/2+(t/p_1)$. 首先在 $p\leqslant 2$ 时，若取 $p_1=1$, $\mu_0=0$, $\mu_1=(n-1)/2$, 则经简单计算可知 $\mu=(n-1)\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right]$. μ 显然是 p_1、μ_0 和 μ_1 的连续函数(把 t 用这些参数表示出来，就可看出). 那么取 $p_1>1$, $\mu_0>0$, $\mu_1>(n-1)/2$, 则由连续性, 我们总是可以认为任一 μ 都是满足 $\mu>(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$. 若 $p\geqslant 2$, 只要开始时取 $p_1=\infty$, 其证明就完全类似. 这就完成了定理 5.1 之(a)的证明.

由此, 根据第二章建立的关于算子族收敛性的一般原理, 就可推出(b)和(c)(参看第二章定理 3.12). 因为那时, 若取 f 是三角多项式(三角多项式类在 $L^p(T_n)$ 中稠密, $p<\infty$), 则对每个 $\alpha\geqslant 0$, $\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{\alpha}(f)(x)$ 就一致收敛于 f. 】

§6 进一步的结果

6.1 应用证明定理 2.17 时所用的类似的方法可以证明，下

述各级数都是各函数的 Fourier 级数，这些函数在除原点外的基本立方体上是周期性的和连续可微的．而且这些级数具有性质：

(a) 当 $|x|\to 0$ 时，$\sum_{m\neq 0}|m|^{-n}e^{2\pi i m\cdot x}$ 渐近趋向于 $c\cdot\log(1/|x|)$；

(b) 若 P_k 是 $k\geqslant 1$ 阶齐次调和多项式，则 $\sum_{m\neq 0}|m|^{-n-k}P_k(m)\cdot e^{2\pi i m\cdot x}$ 是有界函数；

(c) 当 P_k 是 $k\geqslant 0$ 阶齐次调和多项式，$0<\alpha<n$，且 $b(x)$ 是一个缓慢地趋向 ∞ 的适当的函数时（例如，在 $|x|$ 较大时，b 可取作 $(\log|x|)^{\alpha}$，$(\log(\log|x|))^{c}$，$\exp(\log|x|)^{1/2}$，等等，也可以是这些函数的乘积或商），则对 $|x|\to 0$，有 $\sum_{m\neq 0}|m|^{-\alpha-k}b(|m|)P_k(m)e^{2\pi i m\cdot x}$ 渐近趋向于 $c|x|^{-(n-\alpha)-k}b(1/|x|)P_k(x)$．对于一维的理论，可参看 Zygmnnd[1]，$n$ 维时参看 Wainger[1]．

6.2 还可借助 Poisson 求和公式得到一些不同特性的例子：

(a) 若 $c\neq 0$，$\varepsilon>0$，则 $\sum_{m\neq 0}e^{ci|m|\log|m|}|m|^{-\varepsilon-n/2}e^{2\pi i m\cdot x}$ 是一个连续周期函数的 Fourier 级数；

(b) 当维数 n 是偶数时，$\sum_{|m|>1}|m|^{-n}(\log|m|)^{-1}e^{ci|m|\log(|m|)^{a}}\cdot e^{2\pi i m\cdot x}$ 是一个 $C^{n/2}$ 类函数的 Fourier 级数，其中 $c\neq 0$，$0<a<2/n$．但它不是绝对收敛的．

在一维情形时，例(a)是 Hardy-Littlewood 给出的．(a)和(b)均可参阅 Wainger[1]，那里还研究了其它一些例子．顺便提一下，例(b)表明，推论 1.9 不能再有多大改进．

6.3 下面所述的给出启发性公式 (2.16) 的一个解释．设 $P_k(x)$ 是 k 阶齐次调和多项式．固定 x，考虑 α 的下面两个函数：

$$\sum_{m\neq 0}\frac{P_k(m)}{|m|^{k+\alpha}}e^{2\pi i m\cdot x},\quad \mathrm{Re}(\alpha)>n,$$

和

$$\gamma_{\alpha,k}^{-1}\sum_{m\neq 0}\frac{P_k(x+m)}{|x+m|^{k+n-\alpha}},\quad \mathrm{Re}(\alpha)<0,$$

其中 $\gamma_{\alpha,k}=i^{-k}\pi^{n/2-\alpha}\Gamma((k+\alpha)/2)/\Gamma((n+k-\alpha)/2)$．这两个 α 的函数在它们互为解析延拓的意义下是相等的（参看 Hecke[1] 和 Bochner[6]）．

6.4 设 $S\subset E_n$ 是凸的、对称的、开的和有界的. 假定 $|S|>2^n$, 则 S 至少包含一个异于 0 的格点. 这个古典的 Minkowski 定理可以利用 Poisson 求和公式按下述方法证明, 令 $S_{1/2}=\{x;\ 2x\in S\}$, φ是 $S_{1/2}$ 的特征函数. 令 $f=\varphi*\varphi$. 于是 $\hat{f}=|\hat{\varphi}|^2\geqslant 0$. 可以证明, 如果原点是 S 内仅有的格点, 则当 $m\neq 0$ 时, $f(m)=0$. 而且 Poisson 求和公式 $\sum f(m)=\sum \hat{f}(m)$成立. 所以当 0 是 S 内仅有的格点时, $f(0)=\sum \hat{f}(m)\geqslant \hat{f}(0)$. 但这与 $f(0)=\int \varphi(x)dx=|S_{1/2}|$ 以及 $\hat{f}(0)=\int f(x)dx=|S_{1/2}|^2$ 矛盾. 证明概述可追溯于 Siegel [1].

6.5 设 $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是给定的形式三角级数. n 个级数

$$-i\sum_{m\neq 0} a_m \frac{m_k}{|m|} e^{2\pi i m\cdot x},\ k=1,\ \cdots,\ n,$$

是给定级数的 Riesz 变换. 设

$$u_0(x,\ t)=\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m\cdot t},\ t>0,$$

$$u_k(x,\ t)=-i\sum_{m\neq 0} a_m \frac{m_k}{|m|} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m\cdot x},\ t>0$$

(假定定义 $u_k(k=0,\ \cdots,\ n)$的级数是收敛的). 我们看到, $(n+1)$元组 $F=(u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n)$满足第六章广义 Cauchy-Riemann 方程 (4.18). 与那里的定理类似, 我们称, 当 $\sup\limits_{t>0}\int_{T_n}|F(x,\ t)|^p dx<\infty$ 时, $F\in \boldsymbol{H}^p(T_n)$.

(a) $F\in \boldsymbol{H}^p(T_n)$, $1<p<\infty$, 当且仅当 $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ 是 $L^p(T_n)$ 中一个函数的 Fourier 级数. 可利用第 3 节中的结果证明之.

(b) 设 $(n-1)/n<p<\infty$, $F\in \boldsymbol{H}^p(T_n)$, 则

$$\int_{T_n}\sup_{t>0}|F(x,\ t)|^p dt<\infty,$$

并且 $\lim\limits_{t\to 0} F(x,\ t)$ 几乎处处以及在 $L^p(T_n)$的度量中存在.

(c) 由 $p=1$ 的特殊情形可推出古典 F. 和 M. Riesz 定理的

下述推广（也可参见第六章中的（5.8））．假设$\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$和$\sum_{m\neq 0} a_m(m_k/|m|)e^{2\pi i m\cdot x}(k=1, 2, \cdots, n)$是有限测度的 Fourier-Stieltjes 级数，那么这些测度是绝对连续的．

(b)和(c)的证明类似于第六章中的证明．也可参看 Shapiro [1]．

(d) 补充最后结果的一个事实是(在$n=1$时无类似事实)：设$\sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$和$\sum_{m\neq 0} a_m(m_k/|m|)e^{2\pi i m\cdot x}(k=1, 2, \cdots, n)$是有限测度的 Fourier-Stieltjes 级数，那么，对每个齐次(r阶)调和多项式$P_r(x)$ $(r=0, 1, 2, \cdots)$来说，级数$\sum_{m\neq 0}(P_r(m)/|m|^r)a_m e^{2\pi i m\cdot x}$是$L^1(T_n)$中一个函数的 Fourier 级数．这是用 Stein[3]第七章中的方法证明的．

6.6 定理 2.11 和引理 5.2 有以下更一般的形式．假定$\varphi\in L^1(E_n)$，且$\int_{E_n}\varphi(x)\,dx=0$．设$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$，$K_\varepsilon(x)=\sum_{m\in\Lambda}\varphi_\varepsilon(x+m)$．考虑$(f*K_\varepsilon)(x)=\int_{T_n} f(x-y)K_\varepsilon(y)dy$．则有

(a) 若$f\in L^p(T_n)$，$1\leqslant p<\infty$，则当$\varepsilon\to 0$时，按$L^p(T_n)$范数，$f*K_\varepsilon\to f$．

(b) 若再设$\psi(x)=\sup_{|x|\leqslant|x'|}|\varphi(x')|$在$E_n$上可积，则在$f$的 Lebesgue 集的每个点上，有$(f*K_\varepsilon)(x)\to f(x)$．而且，若

$$\mathfrak{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 当|x|\leqslant 1;\\ 0, & 当|x|>1,\end{cases}$$

则成立
$$\sup_{\varepsilon>0}|(f*K_\varepsilon)(x)|\leqslant Am\mathfrak{f}(x).$$

6.7 设λ是定义在E_n上的复值函数，并且除原点以外，它属于C^n．又假定存在一个常数A，使得在$0\leqslant|\alpha|\leqslant n$时，有$|D^\alpha\lambda(x)|\leqslant A/|x|^{|\alpha|}$．那么序列$\{\lambda(m)\}$，$m\in\Lambda$，$(\lambda(0)=0)$对$1<p<\infty$是$(L^p(T_n), L^p(T_n))$型乘子序列．这个定理当初是 Marcinkiewicz[1]给出的，在那本书里还证明了更强一些的结论．在同样的条件下，λ也是非周期情形的乘子（即$\lambda\in(L^p(E_n)$,

$L^p(E_n)$), $1<p<\infty$)，但由于历史原因，这种类型的结果很晚才出现(见 Mihlin[1] 和 Hörmander[1])．非周期时的结论也可以直接从周期情形利用定理 3.18 得到．仍参看 Stein[3] 第四章．

6.8 定理 5.1 表明，当 $f\in L^p(T_n)$ 时，有 $\|S_*^{(n-1)/2}(f)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$, $1<p<\infty$．对临界指标的这个结果，可以通过考虑 $p\to 1$ 或 $p\to\infty$ 时 A_p 的增长而得到推广．事实上，把定理 5.1 的证明精细化后，可得当 $1<p<2$ 时，有 $A_p\leqslant A(p-1)^{-2}$，而当 $2\leqslant p<\infty$ 时，有 $A_p\leqslant Ap$.

(a) 利用 p 接近于 1 时对 A_p 的估计，我们可得不等式

$$\|S_*^{(n-1)/2}(f)\|_1\leqslant A\int_{T_n}|f|(\log^+|f|)^2dx+B.$$

因而若 $|f|(\log^+|f|)^2$ 可积，则 $\lim\limits_{R\to\infty}S_R^{(n-1)/2}(f)(x)=f(x)$ 对几乎一切 x 成立．

(b) 由在 p 取大值时对 A_p 的估计可知，若 f 是有界的，则存在 $a>0$，使得

$$\int_{T_n}\exp\{aS_*^{(n-1)/2}(f)(x)\}dx<\infty.$$

对(a)可参阅 Stein[4]，而为证明(b)所需的对 A_p 的估计隐含于其中．

6.9 我们已经看到，对任意 $L^1(T_n)$ 中函数，临界指标的局部化性质是不成立的(见定理 4.2 及其脚注)．但在较强的假定下，局部化定理则是成立的．例如，若我们假定 $\int_{Q_n}|f|\log^+|f|\,dx<\infty$，局部化定理就成立．特别地，如果在给定的 x_0 点，f 满足 Dini 条件 $\int_{Q_n}|f(x_0-t)-f(x_0)|\,|t|^{-n}dt<\infty$，则当 $R\to\infty$ 时，有 $S_R^{(n-1)/2}(f)(x_0)\to f(x_0)$．这是下面结果的推论：

$$\sup_{R>0}\left(\int_{Q_n}|\Delta_R(x)|^p dx\right)^{1/p}\leqslant Ap,\ 1\leqslant p<\infty,$$

此处，$\Delta_R(x)=K_R^{(n-1)/2}(x)-\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)R^{1/2}|x|^{-n+(1/2)}\cdot J_{n-(1/2)}(2\pi R|x|)$．详见 Stein[7]．

6.10 下面对于数值级数的 Riesz 平均的凸性定理可用来证明定理 4.3. 考虑一个数值级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 和它的 Riesz 平均 $\sigma_R^\alpha=\sum_{0\leq k<R}(1-k/R)^\alpha c_k$, $\alpha\geq 0$. 假定 $\sigma_R^{\alpha_j}=O(R^{a_j})$, $R\to\infty$, $j=0, 1$. 那么，当 $0<\theta<1$, $\alpha=\alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta$ 以及 $a=a_0(1-\theta)+a_1\theta$ 时，可以断定 $\sigma_R^\alpha=O(R^a)$, $R\to\infty$, 参看 Riesz[1], Chandrasekharan 和 Minukshandaran[1]. 为了把这一结果用于证明定理 4.3, 我们对 $x_0\notin\Lambda$, 记

$$\sigma_R^\alpha=K_{R^{1/2}}^\alpha(x^0)=\sum_{|m|^2<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x^0},$$

(其中 $c_k=\sum_{|m|^2=k} e^{2\pi i m\cdot x^0}$). 我们知道（见(4.28) 后面的不等式），当 $\alpha>(n-1)/2$ 时，$\sigma_R^\alpha=O(R^{(1/2)[(n-1)/2-\alpha]})$. 若再成立 $\sigma_R^0=O(R^{(1/2)[(n-1)/2]})$, 就可从刚才引述的凸性定理推出 $\sigma_R^{(n-1)/2}=O(1)$. 但这对几乎一切 x^0, 与引理 4.6 是矛盾的.

文 献 注 释

论述多重 Fourier 级数的基本性质和 Poisson 求和公式的一般参考资料，有 Bochner 的经典书籍 [3] 和他后来的短文 [6]. 临界指标的意义（见推论 2.15）要追溯到 Bochner 的文章 [7]. 定理 2.17 的 n 维形式可在 Waigner 的专题报告[1]中看到.

第 3 节的主要结果，即定理 3.8 和推论 3.16, 是属于 de Leeuw[1]的. 论证定理 3.18 的主要思想是古典的. 但现在的这种明确的形式似乎是新的. 亦可参看 Igari[1].

对 $L^1(T_n)$ 来说，在临界指标时局部化结论不成立是上面提到过的 Bochner 文章[7]中证明的. 至于存在有 $L^1(T_n)$的函数($n>1$), 其 Fourier 级数几乎无处可按在临界指标的 Riesz 平均求和，也可在 Stein[5] 中找到. 然而这里更强的形式——定理 4.2——则是新的. 定理 4.3 也如此. 所有这些结果，都用了 Bochner 引入的一种方法作为一种出发点. 这种方法涉及到点 x 的集合 S, 对于其中之 x, $\{|x-m|\}$ 是对有理数线性无关的. 至于定理 5.1, 可参看 Stein[4], 也可参看[2]和[7], 它们是有密切联系的. 读者也可参阅 Shapiro 的综述性文章[1], 它涉及了多重 Fourier 级数的多个专题.

参考文献目录

Banach, S.

[1] "Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires," *Bull. Sci. Math. 50* (1926), 27–32, 36–43.

Bari, N.

[1] *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press, New York, 1964.

Benedek, A., and Panzone, R.

[1] "The spaces L^p with mixed norm," *Duke Math. J. 28* (1961), 301–324.

Besicovitch, A.

[1] "Sur la nature des fonctions à carré sommable mesurables," *Fund Math. 4* (1923), 172–195.

[2] "A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions," *Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 41* (1945), 103–110.

[3] "A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions II," *ibidem 42* (1946), 1–10.

Blumenson, L. E.

[1] "A derivation of n-dimensional spherical coordinates," *Am. Math. Monthly 67* (1960), 63–66.

Boas, R. P., and Bochner, S.

[1] "On a theorem of M. Riesz for Fourier Series," *Jour. London Math. Soc. 14* (1939), 62–73.

Bochner, Salomon

[1] "Group invariance of Cauchy's formula in several variables," *Ann. of Math. 45* (1944), 686–707.

[2] "Boundary values of analytic functions of several variables and of almost periodic functions," *Ann. of Math. 45* (1944), 708–722.

[3] *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, 1932.

[4] *Lectures on Fourier Integrals*, Ann. of Math. Studies, No. 42, Princeton University Press, 1959.

[5] "Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 46* (1960), 721–723.

[6] *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley, 1955.

[7] "Summation of multiple Fourier series by spherical means," *Trans. Amer. Math. Soc. 40* (1936), 175–207.

[8] "Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals," *Amer. Jour. Math. 59* (1937), 732–738.

[9] "Uber Faktorfolgen für Fouriersche Reihen," *Acta Szeged 4* (1929), 125–129.

Bochner, S., and Chandrasekharan, K.

[1] *Fourier Transforms*, Ann. of Math. Studies, No. 19, Princeton University Press, 1949.

Bochner, S., and Martin, W. T.

[1] *Several Complex Variables*, Princeton University Press, 1948.

Boerner, Herman

[1] *Representations of Groups*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.

Brelot, M.

[1] *Eléments de la Théorie Classique du Potentiel*, Centre de documentation universitaire, Paris, 1965.

Calderón, A. P.

[1] "Singular integrals," *Bull. A.M.S. 72* (1966), 427–465.

[2] "Intermediate spaces and interpolation, the complex method," *Studia Math. 24* (1964), 113–190.

[3] *Integrales Singulares y sus Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Hiperbolicas*, Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, Fasc. 3.

[4] "On the behavior of harmonic functions at the boundary," *Trans. A.M.S. 68* (1950), 47–54.

Calderón, A. P., and Zygmund, A.

[1] "Note on the boundary values of functions of several complex variables," *Contributions to Fourier Analysis*, Ann. of Math. Studies, No. 25, Princeton University Press, 1950.

[2] "On the theorem of Hausdorff-Young and its extensions," *Contributions to Fourier Analysis*, Ann. of Math. Studies, No. 25, Princeton University Press, 1950.

[3] "On the existence of certain singular integrals," *Acta Math. 88* (1952), 85–139.

[4] "On singular integrals," *Amer. J. Math. 18* (1956), 289–309.

[5] "Singular integral operators and differential equations," *Amer. J. Math. 79* (1959), 901–921.

[6] "On higher gradients of harmonic functions," *Studia Math. 24* (1964), 211–226.

Carleson, L.

[1] "On the existence of boundary values of harmonic functions of several variables," *Ark. Mat. 4* (1962), 393–399.

Cartwright, M. L.

[1] "On the relation between the different types of Abel summation," *Proc. London Math. Soc. 31* (1930), 81–96.

Chandrasekharan, K., and Minakshisundaran, S.

[1] *Typical Means*, Oxford University Press, 1952.

Coifman, R. R., and Weiss, G.

[1] "Representations of compact groups and spherical harmonics," *L'Ens. Math. 14* (1968), 121–173.

[2] "On subharmonicity inequalities involving solutions of generalized Cauchy-Riemann equations," *Studia Math. 36* (1970), 77–83.

Cotlar, M.

[1] *Condiciones de Continuidad de Operadores Potenciales y de Hilbert*, Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, Fasc. 2.

de Leeuw, K.

[1] "On L^p multipliers," *Ann. of Math. 91* (1965), 364–379.

Ehrenpreis, L.

[1] *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Wiley-Interscience, New York, 1970.

Erdelyi, A. (director)

[1] *Higher Transcendental Functions*, Vols. I–III, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1955.

Fefferman, Charles

[1] "The multiplier problem for the ball," *Annals of Math.* (to appear in 1971).

Fleming, W. H.

[1] *Functions of Several Variables*, Addison-Wesley, Reading, Massacnusetts, 1965.

Gagliardo, Emilio

[1] "Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali," *Ricerche Mat. 10* (1961), 244–281.

Gelfand, I. M., and Shilov, G. E.

[1] *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

Goldberg, R. R.

[1] *Fourier Transforms*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No. 52, Cambridge, 1965.

de Guzman, M.

[1] "A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators," *Studia Math. XXXIV* (1970), 299–317.

Hardy, G. H., and Littlewood, J. E.

[1] "A maximal theorem with function-theoric applications," *Acta Math. 54* (1930), 81–116.

Hardy, G. H., and Wright, E. M.

[1] An Introduction to the Theory of Numbers, 3rd edition, Oxford, 1956

Hecke, E.

[1] *Matematische Werke*, Göttingen, 1959.

Helgason, S.

[1] *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

Herz, C. S.

[1] "Bessel functions of matrix argument," *Ann. of Math. 61* (1955), 474–523.

Hewitt, E., and Ross, K. A.

[1] *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer, Berlin, 1963.

Hille, E., and Phillips, R. S.
[1] *Functional Analysis and Semi-groups*, Am. Math. Soc. Coll. Publication XXXI, Providence, 1957.
Hirschman, I. I., jr.
[1] "A convexity theorem for certain groups of transformations," *J. d'Analyse Math. 2* (1953), 209–218.
Hörmander, L.
[1] "Estimates for translation invariant operators on L^p spaces," *Acta Math. 104* (1960), 93–139.
[2] *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.
Horváth, J.
[1] "Sur les fonctions conjuguées à plusieurs variables," *Indag. Math. 15* (1953), 17–29.
Hua, L. K.
[1] *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains*, Vol. 6, Translations of Math. Monographs, Am. Math. Soc., Providence, 1963.
Hunt, R. A.
[1] "On $L(p, q)$ spaces," *L'Ens. Math., 12* (1966), 249–275.
Hunt, R. A., and Wheeden, R. L.
[1] "On the boundary values of harmonic functions," *Trans. Amer. Math. Soc. 132* (1968), 307–322.
Igari, S.
[1] "Fourier analysis," notes to a course given at the University of Wisconsin, 1968.
Jessen, B., Marcinkiewicz, J., and Zygmund, A.
[1] "Note on the differentiability of multiple integrals," *Fund. Math. 25* (1935), 217–234.
Kellog, O. D.
[1] *Foundations of Potential Theory*, Ungar Publ. Co., New York, 1929.
Koecher, M.
[1] "Positivitäts bereiche im R^m," *Amer. J. Math. 79* (1957), 575–597.
Kolmogorov, A. N.
[1] "Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier," *Fund. Math. 7* (1925), 23–28.
Korányi, A.
[1] "Harmonic functions on hermitian hyperbolic space," *Trans. Amer. Math. Soc. 135* (1969), 507–516.
[2] "The Poisson integral for generalized half planes and bounded symmetric domains," *Ann. of Math. 82* (1965), 332–350.
Korányi, A., and Wolf, J.
[1] "Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half planes," *Ann. of Math. 81* (1965), 265–288.
Krein, S. G., and Petunin, J. J.
[1] "Scales of Banach spaces," *Uspehi Math. Nauk, 21* (1966), No. 2 (128), 89–168.

Krein, S. G., and Semenov, E. M.
[1] "On a space scale," *Soviet Math. Dokl.* *2* (1961), 706–710.
Küran, Ü.
[1] "On subharmonicity of nonnegative functions," *J. London Math. Soc.* *40* (1965), 41–46.
Lions, J. L.
[1] "Théorèmes de traces et d'interpolation I, II," *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, *13* (1959), 389–403; *15* (1960), 317–331; III: *J. Math. Pures Appl.* *42* (1963), 195–203.
Lions, J. L., and Peetre, J.
[1] "Sur une classe d'espaces d'interpolation," *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* *19* (1964), 5–68.
Loomis, L.
[1] "A note on Hilbert's transform," *Bull. Amer. Math. Soc.* *52* (1946), 1082–1086.
Lorentz, G. G.
[1] "Some new functional spaces," *Ann. of Math.* *51* (1950), 37–55.
Magenes, E.
[1] "Spazi d'interpolazione ed equazioni a derivate parziali," *Atti. Cong. Un. Mat. Ital.*, Genoa, 1963, 134–197.
Marcinkiewicz, J.
[1] "Sur les multiplicateurs dés series de Fourier," *Studia Math.* *8* (1939), 78–91.
[2] "Sur l'interpolation d'operations," *C. R. Acad. des Sciences, Paris* *208* (1939), 1272–1273.
Marcinkiewicz, J., and Zygmund, A.
[1] "On the summability of double Fourier series," *Fund. Math.* *32* (1939), 112–132.
Mihlin, S. G.
[1] *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Internat. Series of Monographs in Pure and Applied Math., Vol. 83, Pergamon Press, 1965.
Naimark, M. A.
[1] *Normed Rings*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1964.
Oklander, E. T.
[1] "L_{pq} interpolators and the theorem of Marcinkiewicz," *Bull. of the A.M.S.* *72* (1966), 49–53.
[2] "On interpolation on Banach spaces," Ph.D. thesis, University of Chicago, 1964.
O'Neil, R., and Weiss, Guido
[1] "The Hilbert transform and rearrangement of functions," *Studia Math.* *23* (1963), 189–198.
Plancherel, M., and Polya, G.
[1] "Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples," *Comm. Math. Helv.* *9* (1937), 224–248.

Plessner, A.
[1] "Über die Verhalten analytischer funktionen am Rande ihres Definitions-bereiches," *J. fur reine und Angewandte Math.* *159* (1927), 219–227.
Pyatetskii-Shapiro, I. I.
[1] *Géométrie des Domaines Classiques et Théorie des Fonctions Automorphes*, Dunod, Paris, 1969.
Rado, T.
[1] *Subharmonic Functions*, Chelsea Publ. Co., New York, 1949.
Riesz, M.
[1] "Sur un théorème de la moyenne et ses applications," *Acta Sz.* *1* (1923), 114–126.
[2] "Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires," *Acta Math.* *49* (1926), 465–497.
Rockafellar, R. T.
[1] *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
Rothaus, O. S.
[1] "Domains of positivity," *Abh. Math. Sem. Hamburg* *24* (1960), 189–235.
Royden, H. L.
[1] *Real Analysis*, Macmillan, New York, 1963.
Rudin, W.
[1] *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publ., New York, 1962.
Saks, S.
[1] *Theory of the Integral*, Hafner Publ. Co., New York, 1938.
Salem, R., and Zygmund, A.
[1] "A convexity theorem," *Proc. Nat. Acad. U.S.A.* *34* (1948), 443–447.
Schwartz, L.
[1] *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1957.
Shapiro, V.
[1] "Fourier series in several variables," *Bull. Amer. Math. Soc.* *70* (1964), 48–93.
Siegel, C. L.
[1] "Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremal problem," *Acta Math.* *65* (1935), 307–323.
Stein, E. M.
[1] "Functions of exponential type," *Ann. of Math.* *65* (1957), 582–592.
[2] "Interpolation of linear operators," *Trans. Amer. Math. Soc.* *83* (1956), 482–492.
[3] *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
[4] "Localization and summability of multiple Fourier series," *Acta Math.* 100 (1958), 93–147.
[5] "On limits of sequences of operators," *Ann. of Math.* *74* (1961), 140–170.
[6] "Note on the boundary values of holomorphic functions," *Ann. of Math.* *82* (1965), 351–353.
[7] "On certain exponential sums arising in multiple Fourier series," *Ann. of Math.* *73* (1961), 87–109.

Stein, E. M., and Weiss, Guido

[1] "On the theory of harmonic functions of several variables," *Acta Math. 103* (1960), 26–62.

[2] "An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications," *J. Math. Mech. 8* (1959).

[3] "On the interpolation of analytic families of operators on H^p spaces," *Tohoku Math. J. 9* (1957), 318–339.

[4] "Generalizations of the Cauchy–Riemann equations and representations of the rotation group," *Amer. J. Math. 90* (1968), 163–196.

[5] "Interpolation of operators with change of measures," *Trans. Amer. Math. Soc. 87* (1958), 159–172.

Stein, E. M., Weiss, Guido, and Weiss, M.

[1] "H^p classes of holomorphic functions in tube domains," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 52* (1964), 1035–1039.

Stein, E. M., and Weiss, N. J.

[1] "On the convergence of Poisson integrals," *Trans. A.M.S. 140* (1969), 34–54.

Streater, R. F., and Wightman, A. S.

[1] *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, New York, 1964.

Taibleson, M. H.

[1] "Translation invariant operators, duality, and interpolation, II," *J. Math. Mech. 14* (1965), 821–840.

Tamarkin, J. D., and Zygmund, A.

[1] "Proof of a theorem of Thorin," *Bull. A.M.S. 50* (1944), 279–282.

Thorin, G. O.

[1] "An extension of a convexity theorem due to M. Riesz," *Kungl. Fysiografiska Saellskapet i Lund Forhaendlinger, 8* (1939), No. 14.

Titchmarsh, E. C.

[1] "Additional note on conjugate functions," *J. London Math. Soc. 4* (1929), 204–206.

[2] *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

Valentine, F. A.

[1] *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

Vilenkin, N. J.

[1] *Special Functions and the Theory of Group Representations*, Vol. 22, Translations of Math. Monographs, Am. Math. Soc., Providence, 1968.

Vinberg, E. B.

[1] "Homogeneous cones," *Dokl. Russ. Ac. Sci. 133* (1960) (in Russian).

Wainger, S.

[1] "Special trigonometric series in k dimensions," *Mem. Amer. Math. Soc. 59* (1965).

Watson, G. N.

[1] *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

Weil, A.

[1] *L'integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann, Paris, 1965.

Weiss, Guido

[1] "An interpolation theorem for sublinear operators on H^p spaces," *Proc. Amer. Math. Soc. 8* (1957), 92–99.

[2] *Analisis Armonico en Verias Variables. Teoria de los Espacios H^p*. Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, fasc. 9.

[3] *Harmonic Analysis*, M.A.A. Studies in Mathematics, Vol. 3, I.I. Hirschman, Jr., ed., Prentice-Hall, 1965, 124–178.

Weyl, H.

[1] *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1946.

Wiener, N.

[1] *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1935.

[2] "The ergodic theorem," *Duke Math. J. 5* (1939), 1–18.

Yosida, K.

[1] *Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1968.

Zygmund, A.

[1] *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1968.

[2] "On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations," *Journal de Math. 35* (1956), 223–248.

[3] "On the boundary values of functions of several complex variables," *Fund. Math. 36* (1949), 207–235.

索 引

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十 二 画

十 三 画

十 四 画